Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd
University of Education

Erhebung von Rechenstrategien zur Addition und Subtraktion von Zweitklässlern anhand von Visualisierungen mit der App „Number Line“

Wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des Grades

Bachelor of Arts
Lehramt Grundschule

vorgelegt von Sarah Niederberger

1. Prüferin: Prof. Dr. Silke Ladel
2. Prüfer: Lukas Hieber

- 04. Juli 2023 -

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1. Einleitung

Ein wesentlicher Bestandteil des Arithmetikunterrichts im Laufe der Schuljahre „ […] ist die Erweiterung und Vertiefung des Zahlverständnisses. Damit ist mehr gemeint als die Fähigkeit bzw. Fertigkeit, Rechenoperationen nach mehr oder weniger standardisierten Verfahren durchführen zu können“ (vgl. RADATZ et al., 1998, S. 17). Das Ziel des Mathematikunterrichts sollte nicht nur darin liegen, dass die Schülerinnen und Schüler verschiedene Rechenstrategien kennen und bewusst anwenden, sondern dass sie Rechenstrategien entwickeln und nach eigenen Präferenzen einsetzen.

Der Schwerpunkt in dieser Arbeit liegt auf der Auswahl und Häufigkeit möglicher Rechenstrategien zur Addition und Subtraktion im Hunderterraum, die am Rechenstrich mit der App *Number Line* geeignet sind.

Im Folgenden werden die Problemlage sowie die Forschungsfragen der vorliegenden Arbeit dargestellt. Um Antworten auf die Forschungsfragen zu erhalten, ist es notwendig, sich mit dem theoretischen Hintergrund dieser Inhalte auseinanderzusetzen. Zunächst werden die fachwissenschaftlichen Definitionen von Addition und Subtraktion erläutert. Es folgt die Definition der Rechenstrategien sowie die genaue Beschreibung der einzelnen Strategien anhand von Beispielaufgaben. Um die erforderlichen Basiskompetenzen und Grundfertigkeiten bei der Anwendung der Rechenstrategien zu verdeutlichen, wird der Bildungsplan der Grundschule einbezogen. Danach wird der Rechenstrich als Veranschaulichungsmittel erläutert und die möglichen Rechenstrategien am Rechenstrich vorgestellt. Im Anschluss folgt die Analyse der App *Number Lin*e anhand des *ACAT-Review-Guides*. Der letzte Abschnitt des theoretischen Teils beschäftigt sich mit den Ergebnissen bisheriger Studien. Im empirischen Teil wird zunächst das Forschungsdesign beschrieben und die Konzeption der Aufgaben dargestellt. Anschließend wird die Durchführung der Untersuchung erläutert. Die Ergebnisse der Untersuchung werden anhand der Forschungsfragen und der daraus abgeleiteten Hypothesen ausgewertet und interpretiert. An die Auswertung und Interpretation schließt sich die Diskussion der Ergebnisse an. Ein abschließendes Fazit sowie ein Ausblick runden die vorliegende Arbeit ab.

2. Problemlage und Forschungsfragen

Die Anwendung von Rechenstrategien wird bereits im ersten Schuljahr eingeführt und in den folgenden Schuljahren in größeren Zahlenräumen erweitert und vertieft. Die Rechenstrategien sind als „ […] Muster zum Lösen von Klassen von Aufgaben […]“ zu verstehen (EICHLER, 2013, S. 48). Bereits bekannte Muster werden regelmäßig für neue Aufgaben und unterschiedliche Zahlenräume genutzt. Wenn die Schülerinnen und Schüler ein Verständnis dafür entwickeln, dass schrittweises Addieren und Subtrahieren möglich ist und sie sich bewusst Strategien im Hunderterraum aneignen, stellen Aufgaben in höheren Zahlenräumen keine neuen Anforderungen dar (vgl. ebd.).

Die Entwicklung eines Bewusstseins für Rechenstrategien ist eine wichtige Grundlage für deren Anwendung. Um eine Aufgabe strategisch lösen zu können, ist eine Erkenntnis über die verschiedenen Strategien erforderlich. Diese Strategien dienen als Werkzeuge zur Lösung unterschiedlicher Problem- und Aufgabenstellungen.

Ein zentrales Ziel der Bildungsstandards in der Mathematik ist es, die Schülerinnen und Schüler zu befähigen, flexibel mit Rechenstrategien umzugehen. In der Mathematikdidaktik stellt sich häufig die Frage, ob die Schülerinnen und Schüler eine spezifische Rechenstrategie erlernen und diese anwenden oder ob sie eine Vielfalt an Strategien für unterschiedliche Aufgabentypen entdecken.

Eine besondere Schwierigkeit bei der Anwendung von Rechenstrategien besteht darin, dass häufig eine Externalisierung auf dem mentalen Rechenstrich nicht ausreichend vorhanden ist und somit Rechenstrategien nicht richtig eingesetzt und ausgeführt werden können. Zur Förderung der Externalisierung können verschiedene Materialien als Hilfsmittel verwendet werden. In der Literatur hat sich der Rechenstrich als ein besonderes Material für die Anwendung von Rechenstrategien herausgestellt. Am Rechenstrich können eigene Denk- und Vorgehensweisen repräsentiert werden, die eine Verbesserung des kognitiven Schematas und der Vorstellung von Zahlbeziehungen ermöglichen.

In dieser Arbeit soll der Einsatz von Rechenstrategien speziell bei der Arbeit am Rechenstrich mit der App *Number Line* näher beleuchtet und herausgearbeitet werden. Des Weiteren soll untersucht werden, welche Rechenstrategien die Schülerinnen und Schüler im zweiten Schuljahr am Rechenstrich bei der Addition und zur Subtraktion am Rechenstrich anwenden. Daraus lassen sich folgende Fragestellungen ableiten:

- *Forschungsfrage 1: Welche Rechenstrategien wenden die Kinder beim Lösen von Additionsaufgaben im Hunderterraum am Rechenstrich an?*

- *Forschungsfrage 2: Welche Rechenstrategien wenden die Kinder beim Lösen von Subtraktionsaufgaben im Hunderterraum am Rechenstrich an?*

Darüber hinaus soll die Häufigkeit der einzelnen Rechenstrategien beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben am Rechenstrich untersucht werden. Es werden folgende Forschungsfragen gestellt:

- *Forschungsfrage 3: Welche Rechenstrategien werden bei der Addition im Hunderterraum am Rechenstrich am häufigsten genutzt?*

- *Forschungsfrage 4: Welche Rechenstrategien werden bei der Subtraktion im Hunderterraum am Rechenstrich am häufigsten genutzt?*

Neben der Häufigkeit der Rechenstrategien wird auch die Entwicklung einer Hauptstrategie näher untersucht. Dabei geht es um die Frage, ob die einzelnen Rechenstrategien je nach Aufgabentyp gewählt werden oder ob sich eine Hauptstrategie herausbildet, die unabhängig vom Aufgabentyp bei jeder Aufgabe eingesetzt wird. Die Forschungsfrage lautet:

- *Forschungsfrage 5: Verwenden die Kinder die Rechenstrategien aufgabenspezifisch oder haben die Kinder eine Hauptstrategie, die sie unabhängig vom Aufgabentyp einsetzen?*

3. Theoretischer Hintergrund

Um eine Vielzahl von Aufgaben zu den verschiedenen Rechenoperationen am Rechenstrich strategisch lösen zu können, sind grundlegende Kenntnisse und ein Verständnis dieser Operationen erforderlich.

In der Mathematik werden vier verschiedene Grundrechenarten unterschieden: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Diese Grundrechenarten werden im Rahmen der Grundschule als Rechenoperationen bezeichnet (vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER, 2008, S. 24).

Die fachwissenschaftlichen Definitionen der Rechenoperationen Addition und Subtraktion werden im folgenden Abschnitt erläutert.

3.1 Fachwissenschaftliche Definitionen zur Addition und Subtraktion

Der Begriff *Addition* leitet sich vom lateinischen *ad-dare; additio* ab und bedeutet *hinzu-geben; Hinzufügung.* Damit wird das Zusammenzählen von Zahlen beschrieben. Die Addition ist die einfachste Grundrechenart und bildet zusammen mit der Subtraktion die Grundrechenarten der ersten Stufe. Aufgrund der Verwendung des Rechenzeichens Plus + wird die Addition auch als Strichrechnung bezeichnet (vgl. ATHEN & BRUHN, 1976, S. 25). Für die Addition wird das Operationszeichen + verwendet. Die Addition kann auch als abgekürztes Vorwärtszählen aufgefasst werden, wie zum Beispiel: 6 + 3 als 6 + 1 → 7+ 1 → 8 + 1 → 9 (vgl. GELLERT et al., 1977, S. 20). Die Addition von Ordinalzahlen lässt sich durch die Peano-Axiome erklären.

„Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann wird die Summe n + x für alle $x \in \mathbb{N}$ durch folgende Vorschriften festgelegt:

i) $n + 0 := n.$

ii) $n + v(x) := v(n+x)$

Aus dem Induktions-Axiom folgt, dass hierdurch die Summe $n + x$ für alle natürlichen Zahlen x definiert ist. Definiert man $1 := v(0)$, so ergibt sich als spezieller Fall von ii) für die Nachfolge-Funktion die Darstellung $v(n) = n + 1$“ (Forster, 2015, S. 2).

Bei der Addition von Kardinalzahlen wird die Summe zweier disjunkter Mengen A und B gesucht (vgl. Griesel, 1971, S. 143). „Unter der Summe a + b der beiden Zahlen a und b versteht man eine Kardinalzahl, die man erhält, indem man einen Repräsentanten A für a und einen dazu disjunkten Repräsentanten B für b auswählt. Dann betrachte man $A \cup B$. Die Kardinalzahl von $A \cup B$ ist dann gleich der Summe a + b“ (ebd.). Zu zwei natürlichen Zahlen a und b gibt es genau eine Summe s (vgl. Gellert et al., 1977, S. 20). Eine Additionsaufgabe besteht aus zwei Summanden. Die erste Zahl wird als *erster Summand* und die zweite Zahl als *zweiter Summand* bezeichnet. Das Ergebnis ist die *Summe* (vgl. Wittmann & Müller, 2019, S. 72). In Abbildung 1 wird der Aufbau einer Additionsaufgabe aufgezeigt.

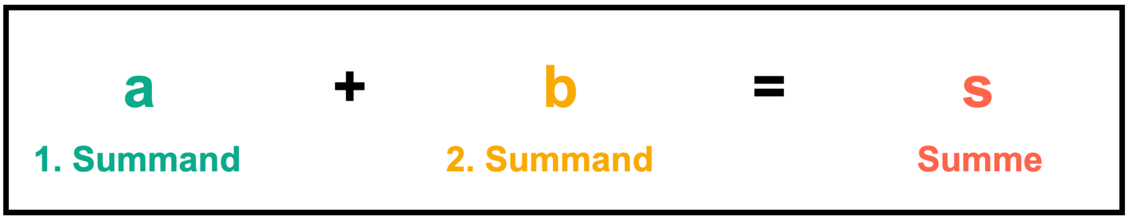


Abbildung 1: Aufbau einer Additionsaufgabe
Quelle: Eigene Darstellung

Um Rechenvorteile bei der Addition nutzen zu können, eignen sich verschiedene Rechengesetze wie das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Gesetz von der Konstanz der Summe. Das Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz) sagt aus, dass die Summe immer gleich bleibt, wenn die Summanden vertauscht werden | a + b = b + a |. Das Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz) sieht vor, dass in Summen mit mehreren Summanden beliebig zusammengefasst werden können. Dabei bleibt das Ergebnis stets gleich | a + (b + c) = (a + b) + c | (vgl. Götze et al., 2020, S. 48; Wittmann & Müller, 2019, S. 71f.).
Des Weiteren können Summanden gegensinnig verändert werden. Dabei wird ein Summand vergrößert, während der andere Summand um den gleichen

Betrag verkleinert wird. Das Ergebnis ändert sich nicht. Hier wird von dem *Gesetz von der Konstanz der Summe* gesprochen (vgl. Götze et al., 2020, S. 48; Wittmann & Müller, 2019, S. 73).

Der Begriff *Subtraktion* lässt sich auf das lateinische Verb *subtrahere* zurückführen und bedeutet *abziehen.* Die Subtraktion ist eine Rechenart des Subtrahierens und gehört mit der Addition von Zahlen zu den Rechenarten erster Stufe. Wegen des Rechenzeichens - wird die Subtraktion auch als Strichrechnung bezeichnet (vgl. Athen & Bruhn, 1978, S. 1024f.). Diese Rechenart ist die Umkehroperation zur Addition, die den umgekehrten Vorgang zur Addition ausführt und als Wegnehmen oder Abziehen bezeichnet wird. Für die Subtraktion wird das Operationszeichen - (Minus) verwendet. Die Subtraktion kann auch als abgekürztes Rückwärtszählen aufgefasst werden, wie zum Beispiel: 8 - 3 als $8 - 1 \rightarrow 7 - 1 \rightarrow 6 - 1 \rightarrow 5$ (vgl. Gellert et al., 1977, S. 21). Die Definition der Subtraktion von Kardinalzahlen lässt sich wie folgt erläutern: „Es seien a und b natürliche Zahlen mit $a > b$ oder $a = b$, dann ist $a – b$ eine Kardinalzahl, die man folgendermaßen erhält: Man wähle einen Repräsentanten A für a und einen Repräsentanten B für b, und zwar so, da[ss] $B \subseteq A$ ist. Dann ist die Kardinalzahl von $A \setminus B$ die Differenz $a – b$“ (Griesel, 1971, S. 152). Bei der Subtraktion gibt es zu zwei natürlichen Zahlen a und b genau eine Differenz d, wenn a nicht kleiner ist als b (siehe Abbildung 2) (vgl. Gellert et al., 1977, S. 21). Eine Subtraktionsaufgabe besteht aus einem *Minuenden*[1] und einem *Subtrahenden*[2]. Das Ergebnis ist die *Differenz*[3] (vgl. Wittmann & Müller, 2019, S. 90).

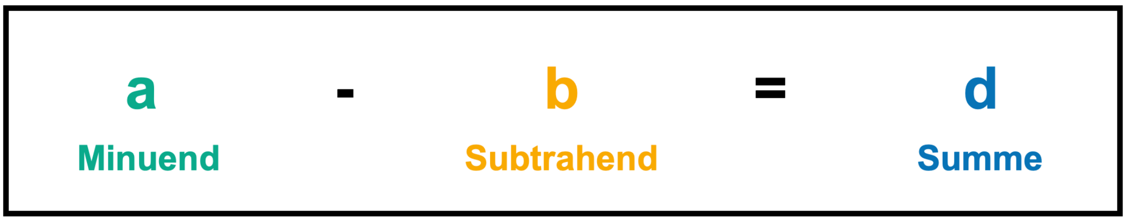


Abbildung 2: Aufbau einer Subtraktionsaufgabe
Quelle: Eigene Darstellung

---

[1] lat. *minuere*, vermindern.

[2] lat. *subtrahere*, wegnehmen.

[3] lat. *differe*, sich unterscheiden

Im Gegensatz zur Addition gelten bei der Subtraktion die Rechengesetze wie das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Gesetz von der Konstanz der Summe nicht. Die Subtraktion ist nicht kommutativ, da das Vertauschen von Minuenden und Subtrahenden zu unterschiedlichen Ergebnissen führt und ist nicht assoziativ, da mehrere Subtrahenden nicht immer beliebig zusammengefasst werden können (vgl. GÖTZE et al., 2020, S. 51). Bei der Subtraktion können aber die Differenzen jedoch gleichsinnig verändert werden. Das bedeutet, dass der Minuend und der Subtrahend um den gleichen Betrag vergrößert oder verkleinert werden. Das Ergebnis bleibt immer gleich. Dieses Gesetz wird als *Gesetz von der Konstanz der Differenz* bezeichnet (vgl. GÖTZE et al., 2020, S. 51; WITTMANN & MÜLLER, 2019, S. 90).

3.2 Rechenstrategien

Ein zentrales Ziel in der Mathematik, insbesondere im Bereich der Arithmetik, ist die Entwicklung der Fähigkeit zum flexiblen Rechnen. Um komplexe Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Hunderterraum flexibel lösen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler Strategien entwickeln. Diese Strategien müssen bewusst ausgewählt werden, um eine Aufgabe erfolgreich bewältigen zu können.

Im Folgenden wird zunächst die Definition von Rechenstrategien beschrieben. Anschließend werden die einzelnen Rechenstrategien zur Addition und Subtraktion vorgestellt und anhand von Beispielen erläutert.

3.2.1 Definition von Rechenstrategien

In der Literatur gibt es keine einheitliche Definition zur Kategorisierung von Rechenstrategien, da der Begriff *Strategie* weit verbreitet ist. Für viele Autoren ist der Begriff *Lösungsstrategie* wichtiger als der Begriff *Rechenverfahren* (vgl. BEISHUIZEN, 1997, S. 130; LORENZ, 1998, S. 62).
Beishuizen (1997, S. 129) betont die Wichtigkeit einer klaren Unterscheidung zwischen dem Begriff *Lösungsstrategie* und dem Begriff *Rechenverfahren*.

Unter dem Begriff *Lösungsstrategie (solution strategy)* versteht er die Auswahl von Optionen im Hinblick auf die Problemstruktur (vgl. ebd., S. 127). Als Beispiel nennt er die Aufgabenstellung: *Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 64 und 36?* Für diese Aufgabe verwendet Beishuizen verschiedene Lösungsstrategien wie die Subtraktion (*Subtraction: 64 - 36*), das Ergänzen zur Subtraktion *(Taking-away-to: 64 - __ = 36)* oder das Ergänzen zur Addition (*Adding-on-to: 36 +* __ *= 64*) (vgl. ebd., S. 131). Als *Rechenverfahren (computation procedure)* bezeichnet er die Ausführung von Rechenschritten in Bezug auf die Zahlen des Problems (vgl. ebd., S. 127). Dabei unterscheidet Beishuizen zwischen dem schrittweisen Verfahren *(sequential procedure)* und dem Zerlegungsverfahren *(decomposition procedure)* (vgl. ebd., S. 131.). Das *schrittweise Verfahren* ist ein sequentielles Vorgehen und wird auch als *jump method N10*[4] (N+10 oder N-10) bezeichnet. Die Zehner werden mit dem Zehnersprung von der ersten ungeteilten Zahl vorwärts oder rückwärts gezählt. Das *Zerlegungsverfahren* wird auch als *split method 1010* (10+10 oder 10-10) bezeichnet. Hierzu werden die Zehner und Einer beider Zahlen getrennt voneinander geteilt und separat berechnet (vgl. BEISHUIZEN, 1993, S. 295; BEISHUIZEN, 1997, S. 131).

Auch Lorenz (1998, S. 62) bevorzugt eine klare Unterscheidung zwischen Rechenverfahren und Rechenstrategien. Für ihn sind „ […] unter Rechenverfahren bestimmte, unterscheidbare Wege zu verstehen, ein arithmetisches Problem zu lösen […]“ (ebd.). Unter Rechenstrategien beschreibt er eine „ […] Flexibilität in der Auswahl von problemangemessenen Verfahren […]" (ebd.).

Eine weitere Definition von Rechenstrategien formuliert Benz (2005, S. 60) in ihrer Arbeit zur Entwicklung von Rechenstrategien im Verlauf des zweiten Schuljahres. Nach Benz sind Rechenstrategien „ […] die Tätigkeit des Zerlegens einer Additions- oder Subtraktionsaufgabe in einfachere Teilaufgaben […]“ (ebd.).

[4] Die Abkürzung *N* steht für Number.

3.2.2 Rechenstrategien zur Addition und Subtraktion

In diesem Abschnitt werden verschiedene Rechenstrategien zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Hunderterraum vorgestellt. Bei der Addition und Subtraktion werden verschiedene Lösungsmethoden und Notationsformen unterschieden (vgl. Radatz et al., 1998, S. 42f.). Die Notationsformen der einzelnen Rechenstrategien sind nicht eindeutig festgelegt, sodass verschiedene Notationen möglich sind. Im Folgenden werden die Rechenstrategien zur Lösung von Additionsaufgaben im Hunderterraum beschrieben. Dabei wurden für jede Rechenstrategie geeignete Aufgaben ausgewählt.

1. Stellenweises Rechnen

Das *stellenweise Rechnen* ist eine Strategie, um Zahlen in ihre Stellenwerte zu zerlegen. Dabei werden die beiden Summanden in ihre Zehner und Einer zerlegt. Anschließend werden die zerlegten Summanden stellenweise addiert. Die Addition der beiden Teilsummen führt dann zum Ergebnis der Aufgabenstellung (vgl. Götze et al., 2020, S. 96; Wittmann & Müller, 2019, S. 162; Padberg & Benz, 2021, S. 124, S. 200; et al.). Die Reihenfolge der Berechnung der Zehner und Einer ist irrelevant. Häufig wird mit der Berechnung der Zehner begonnen und dann folgen die Einer (vgl. Götze et al., 2020, S. 96). In Abbildung 3 wird das *stellenweise Rechnen* am Beispiel der Aufgabe 53 + 26 aufgezeigt. Nach der stellenweisen Zerlegung der Summanden werden zunächst die beiden Zehner und dann die Einer addiert. Anschließend werden die Ergebnisse der beiden Teilaufgaben miteinander addiert. Die Reihenfolge der Stellenwertberechnung kann auch umgekehrt erfolgen (siehe Abbildung 4). Zunächst werden die beiden Einer addiert und anschließend die Zehner.

$$\begin{array}{r} \underline{53 + 26 = 79} \\ 50 + 20 = 70 \\ 3 + 6 = 9 \end{array}$$

Abbildung 3: Stellenweises Rechnen (1. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

$$\begin{array}{r} \underline{53 + 26 = 79} \\ 3 + 6 = 9 \\ 50 + 20 = 70 \end{array}$$

Abbildung 4: Stellenweises Rechnen (2. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

Für die Strategie des *stellenweisen Rechnens* bei der Addition ist die Gültigkeit des Assoziativ- und Kommutativgesetzes grundlegend (vgl. PADBERG & BENZ, 2021, S. 200). Die Wahl dieser Strategie basiert auf den einfachen arithmetischen Anforderungen, da diese eine einfache Berechnung mit glatten Zahlen bzw. Zehnern ermöglicht (vgl. GÖTZE et al., 2020, S. 96; SCHERER & MOSER OPITZ, 2010, S. 150). Das *stellenweise Rechnen* dient als gute Vorbereitung für die schriftliche Addition und ist didaktisch bedeutsam für den Übergang zur schriftlichen Addition. Diese Strategie kann mit verschiedenen Materialien wie beispielsweise das Mehrsystem-Material[5] oder das Rechengeld veranschaulicht werden. Für die Darstellung am Rechenstrich ist diese Strategie jedoch nicht geeignet, da der Rechenstrich nicht sinnvoll zur Notation genutzt werden kann (vgl. PADBERG & BENZ, 2021, S. 200; SCHERER & MOSER OPITZ, 2010, S. 150).

2. Schrittweises Rechnen

Das *schrittweise Rechnen* ist eine Strategie, bei der ein Summand in seine Stellenwerte zerlegt wird, während der andere Summand unverändert bleibt. In der Regel wird der zweite Summand schrittweise in seine Stellenwerte zerlegt. Dadurch erhält man leichtere Teilaufgaben, die jeweils addiert werden können. Das Ergebnis der letzten Teilaufgabe ist das Endergebnis der gegebenen Aufgabe (vgl. GÖTZE et al., 2020, S. 96, WITTMANN & MÜLLER, 2019, S. 162f., PADBERG & BENZ, 2021, S. 124, S. 200; et al.). Bei der Wahl der Zerlegung des Summanden gibt es vielfältige Möglichkeiten (vgl. Götze et al., 2020, S. 96). Nach der Zerlegung des Summanden können beispielsweise zuerst die Zehner dazu zu addieren und dann die Einer oder umgekehrt, zuerst die Einer und dann die Zehner (vgl. WITTMANN & MÜLLER, 2019, S. 162f.). Die Abbildungen 5 und 6 zeigen zwei weitere Formen des schrittweisen Rechnens.

[5] Das Mehrsystem-Material wird auch als Dienes-Material bezeichnet.

$$\begin{aligned} &\underline{23 + 41 = 64} \\ &23 + 40 = 63 \\ &63 + 1 = 64 \end{aligned}$$

Abbildung 5: Schrittweises Rechnen ohne Zehnerübergang (1. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

$$\begin{aligned} &\underline{23 + 41 = 64} \\ &23 + 1 = 24 \\ &24 + 40 = 64 \end{aligned}$$

Abbildung 6: Schrittweises Rechnen ohne Zehnerübergang (2. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

Das *schrittweise Rechnen* eignet sich besonders gut bei Aufgaben mit Übergang im Zehnerbereich. Hier besteht eine weitere Möglichkeit darin, dass bei der Addition der Summanden bis zum nächsten vollen Zehner ergänzt werden kann (vgl. RADATZ et al. 1998, S. 43). Auf diese Weise kann schrittweise mit den Stellenwerten gearbeitet werden. In Abbildung 7 wird im ersten Teilschritt bis zum nächsten Zehner ergänzt. Anschließend wird das erste Teilergebnis mit dem Zehner addiert. Im letzten Teilschritt werden die restlichen Einer des zweiten Summanden hinzugefügt. Die Abbildung 8 zeigt eine weitere Form der Strategie des *schrittweisen Rechnens*. Es kann zunächst mit der Addition des Zehners begonnen werden. Dann wird bis zum nächsten Zehner ergänzt und im letzten Schritt werden die restlichen Einer des zweiten Summanden zum zweiten Teilergebnis addiert.

$$\begin{aligned} &\underline{36 + 48 = 84} \\ &36 + 4 = 40 \\ &40 + 40 = 80 \\ &80 + 4 = 84 \end{aligned}$$

Abbildung 7: Schrittweises Rechnen mit Zehnerübergang (1. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

$$\begin{aligned} &\underline{36 + 48 = 84} \\ &36 + 40 = 76 \\ &76 + 4 = 80 \\ &80 + 4 = 84 \end{aligned}$$

Abbildung 8: Schrittweises Rechnen mit Zehnerübergang (2. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

Die Notationsformen der Strategie des *schrittweisen Rechnens* können auf vielfältige Weise dargestellt werden (vgl. PADBERG & BENZ, 2021, S. 200).

Diese Strategie kann auch für beliebiges Material, wie zum Beispiel den Rechenrahmen oder die Hundertertafel mit Zahlen verwendet werden (vgl. Radatz et al., 1998, S. 47ff.). Ein besonders gut geeignetes Material ist der Rechenstrich. Am Rechenstrich können die einzelnen Teilschritte gut veranschaulicht werden (vgl. Padberg & Benz, 2021, S. 200; Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 153). Eine ausführliche Beschreibung und Darstellung der einzelnen Rechenstrategien am Rechenstrich wird in Abschnitt 3.2.4 aufgeführt. Das *schrittweise Rechnen* erleichtert den Übergang zum Kopfrechnen, da jeweils mit den einzelnen Zwischenergebnissen weitergerechnet wird und der letzte Rechenschritt zum Endergebnis führt (vgl. Padberg & Benz, 2021, S. 200).

3. Mischform

Die *Mischform* ist eine Kombination aus *stellenweisem* und *schrittweisem Rechnen* (vgl. Götze et al., 2020, S. 97; Padberg & Benz, 2021, S. 124, S. 200). Bei dieser Strategie werden beide Summanden in ihre Stellenwerte zerlegt. Eine Möglichkeit besteht darin, die Zehner zu zerlegen und anschließend zu addieren. Anschließend werden die Einer der beiden Summanden schrittweise addiert (vgl. Götze et al., 2020, S. 97; Padberg & Benz, 2021, S. 124). In Abbildung 9 wird eine Mischform am Beispiel der Aufgabe 74 + 15 veranschaulicht. Im ersten Schritt werden die beiden Summanden in ihre Zehner und Einer zerlegt. Dann werden die jeweiligen Zehner miteinander addiert. Das erste Teilergebnis wird dann mit den Einer des ersten Summanden ergänzt. Zuletzt werden die Einer des zweiten Summanden, die zum zweiten Teilergebnis addiert. Das Ergebnis der letzten Teilaufgabe ergibt das Endergebnis. Auch bei dieser Strategie gibt es verschiedene Notationsformen, die dargestellt werden können. Die häufigste Notationsform bei der *Mischform* ist eine Gleichungsschreibweise (vgl. Padberg & Benz, 2021, S. 201). Der Rechenstrich ist für diese Strategie aufgrund der Kombination von *stellenweisem* und *schrittweisem Rechnen* nicht geeignet.

$$\underline{74 + 15 = 89}$$
$$70 + 10 = 80$$
$$80 + 4 = 84$$
$$84 + 5 = 89$$

Abbildung 9: Mischform
Quelle: Eigene Darstellung

4. Ableiten (operative Beziehungen nutzend)

Unter der Strategie *Ableiten* werden verschiedene Rechenstrategien, die operative Beziehungen nutzen, zusammengefasst (vgl. Benz, 2005, S. 63). Eine mögliche Strategie ist die *Hilfsaufgabe*. Bei dieser Strategie wird eine verwandte, einfachere oder bekannte Aufgabe eingesetzt und berechnet (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 153). Um eine leichtere Aufgabe zu nutzen, wird ein Summand auf- oder abgerundet. Anschließend erfolgt die Korrektur des auf- oder abgerundeten Summanden (vgl. Götze et al., 2020, S. 97; Wittmann & Müller, 2019, S. 163; Radatz et al., 1998, S. 43; et al.). In Abbildung 10 ist eine *Hilfsaufgabe* am Beispiel der Aufgabe 34 + 29 dargestellt. Bei dieser Strategie wird der zweite Summand auf die nächste Zehnerstelle aufgerundet. Anschließend wird der zweite Summand korrigiert, indem die ergänzte 1 subtrahiert wird. Die Abbildung 11 zeigt eine weitere Form einer *Hilfsaufgabe*. Hier wird der erste Summand verändert, indem dieser auf die letzte Zehnerstelle abgerundet wird. Es folgt die Addition des abgerundeten Summanden mit dem unverändert gebliebenen zweiten Summanden. Das Teilergebnis wird dann mit den restlichen Einern des ersten Summanden addiert.

34 + 29 = 63
34 + 30 = 64
64 - 1 = 63

Abbildung 10: Hilfsaufgabe (1. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

22 + 26 = 48
20 + 26 = 46
46 + 2 = 48

Abbildung 11: Hilfsaufgabe (2. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

Die *Hilfsaufgabe* eignet sich für Additionsaufgaben mit glatten Zehnerzahlen. Bei der Addition ist darauf zu achten, dass der Summand nach dem Auf- oder Abrunden richtig verändert, also vergrößert oder verkleinert wird (vgl. Götze et al., 2020, S. 97).

Eine weitere Strategie ist das *Vereinfachen*. Für diese Strategie wird das *Gesetz der Konstanz der Summe* genutzt. Dabei wird ein Summand um einen Wert erhöht, während der andere Summand um den gleichen Wert verringert wird. Die beiden Summanden werden gegensinnig verändert. Dadurch ergibt sich eine einfachere Aufgabe mit gleichem Ergebnis (vgl. Götze et al., 2020, S. 97, Padberg & Benz, 2021, S. 124; Wittmann & Müller, 2019, S. 163; et al.). In Abbildung 12 wird das *Vereinfachen* am Beispiel der Aufgabe 25 + 35 verdeutlicht. Der erste Summand wird auf den nächsten Zehner aufgerundet und der zweite Summand wird um den gleichen Wert abgerundet.

$$\begin{array}{c}25 + 35 = 60\\ \downarrow{+5}\quad\downarrow{-5}\\ 30 + 30 = 60\end{array}$$

Abbildung 12: Vereinfachen
Quelle: Eigene Darstellung

Neben der *Hilfsaufgabe* und dem *Vereinfachen* können Additionsaufgaben auch mit Hilfe von *Analogieaufgaben* gelöst werden. Um das Lösen einer Aufgabe zu erleichtern, werden verwandte Aufgabentypen herangezogen (vgl. Padberg & Benz, 2021, S. 124). Die Abbildung 13 stellt eine *Analogieaufgabe* dar. Die Aufgabe 56 + 3 kann durch eine einfachere Aufgabe 6 + 3 gelöst werden. Die Hilfsaufgabe kann für verschiedene Materialien wie den Rechenrahmen oder den Rechenstrich verwendet werden (vgl. Radatz et al. 1998, S. 52, S. 58). Für die Darstellung der Strategien *Vereinfachen* und *Analogien* ist der Rechenstrich ungeeignet, da beide Summanden verändert werden.

$$\begin{array}{c}\underline{56 + 3 = 59}\\ 6 + 3 = 9\end{array}$$

Abbildung 13: Analogieaufgabe
Quelle: Eigene Darstellung

5. Verdoppeln

Bei der Addition kann auch die Strategie *Verdoppeln* genutzt werden. Das *Verdoppeln* bietet die Möglichkeit, auf leichtere Aufgaben zurückzugreifen. Dabei wird der erste Summand verdoppelt und miteinander addiert. Anschließend werden die restlichen Einer ergänzt (vgl. Schipper, 2009, S. 131, S. 133). In Abbildung 14 wird das *Verdoppeln* am Beispiel der Aufgabe 44 + 46 aufgezeigt. Der erste Summand wird verdoppelt und miteinander addiert. Das Teilergebnis wird dann mit den restlichen Einern des zweiten Summanden addiert.

$$\begin{array}{c}\underline{44 + 46 = 90}\\ 44 + 44 = 88\\ 88 + 2 = 90\end{array}$$

Abbildung 14: Verdoppeln
Quelle: Eigene Darstellung

Beim Kopfrechnen werden *Verdopplungsaufgaben* eingesetzt, um den Bestand an auswendig gelernten oder automatisiert lösbaren Aufgaben zu erweitern. Ohne diese Fähigkeiten wird die Anwendung dieser Strategie keine Erleichterung beim Rechnen bringen. Das *Verdoppeln* kann mit dem Rechenstrich materialgestützt erarbeitet und dargestellt werden (vgl. Schipper, 2009, S. 133).

Die meisten Rechenstrategien bei der Addition lassen sich auch auf die Subtraktion übertragen. Im Folgenden werden die Rechenstrategien beim Lösen Subtraktionsaufgaben dargestellt. Auch hier wurden zu den jeweiligen Rechenstrategien passende Aufgaben ausgewählt.

1. *Stellenweises Rechnen*

Beim *stellenweisen Rechnen* werden die Zahlen wie bei der Addition stellenweise zerlegt. Der Minuend und der Subtrahend werden in ihre Stellenwerte zerlegt. Anschließend werden die Zehner und die Einer getrennt voneinander stellenweise subtrahiert (vgl. Götze et al., 2020, S. 102; Wittmann & Müller, 2019, S. 163f.; Padberg & Benz, 2021, S. 140; et al.). Die einzelnen Teilschritte werden dann addiert, um das Endergebnis zu erhalten (vgl. Schipper, 2009, S. 131f.). Auch hier spielt die Reihenfolge der Berechnung der jeweiligen Stellenwerte keine Rolle. Die Abbildung 15 veranschaulicht die Strategie des *stellenweisen Rechnens*. Im ersten Schritt werden Minuend und Subtrahend stellenweise in Zehner und Einer zerlegt. Dann werden die beiden Zehner voneinander subtrahiert. Danach werden die Einer voneinander subtrahiert. Im letzten Schritt werden die Teilergebnisse miteinander addiert. Die Abbildung 16 zeigt eine andere Form des *stellenweisen Rechnens*. Hier werden zuerst die Einer und dann die Zehner subtrahiert.

$$\begin{array}{r} \underline{67 - 34 = 33} \\ 60 - 30 = 30 \\ 7 - 4 = 3 \end{array}$$

Abbildung 15: Stellenweises Rechnen (1. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

$$\begin{array}{r} \underline{67 - 34 = 33} \\ 7 - 4 = 3 \\ 60 - 30 = 30 \end{array}$$

Abbildung 16: Stellenweises Rechnen (2. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

Eine Schwierigkeit bei dieser Strategie tritt auf, wenn der Einer am Subtrahenden größer ist als der Einer am Minuenden. In diesem Fall ist die Stellenwertberechnung nicht mehr möglich. Um dieses Problem zu lösen, gibt es eine Vorgehensweise, die in Abbildung 17 dargestellt ist. Zunächst wird der Minuend und der Subtrahend in seine Stellenwerte zerlegt und getrennt voneinander berechnet. Bei der letzten Teilaufgabe wird das Zwischenergebnis an der Einerstelle als *negativer Wert* vermerkt. Anschließend wird bei der Berechnung der einzelnen Zwischenergebnisse subtrahiert anstatt addiert (vgl. Götze et al., 2020, S. 102; Radatz et al., 1998, S. 43). Aufgrund des Auftretens der negativen Zahl wurde diese Form des *stellenweisen Rechnens* von der konventionellen Rechenmethode ausgeschlossen (vgl. Radatz et al., 1998, S. 43). Bei der Subtraktion erscheint die Darstellung der Strategie des *stellenweisen Rechnens* am Rechenstrich als nicht vorteilhaft, da diese Strategie die Grundvorstellung des Zusammenfügens von passenden Teilen beinhaltet und nicht der Form von sequentiellen Rechenwegen entspricht (vgl. Schipper, 2009, S. 135).

$$\underline{73 - 28 = 45}$$
$$70 - 20 = 50$$
$$3 - 8 = -5 \text{ (Negativer Wert)}$$

Abbildung 17: Stellenweises Rechnen (3. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

2. *Schrittweises Rechnen*

Das *schrittweise Rechnen* erfolgt durch das Zerlegen des Subtrahenden, während der Minuend unverändert bleibt. Der Subtrahend wird schrittweise in Zehner und Einer zerlegt. Dann werden die Zehner und die Einer nacheinander schrittweise vom unveränderten Minuenden subtrahiert (vgl. Götze et al., 2020, S. 103; Wittmann & Müller, 2019, S. 164; Padberg & Benz, 2021, S. 139; et al.). Das Ergebnis des letzten Teilschritts ist das Endergebnis der Aufgabe. Auf diese Weise kann die Subtraktionsaufgabe in kleinere Teilaufgaben zerlegt werden. Ähnlich wie bei der Addition gibt es auch bei der Subtraktion verschiedene Möglichkeiten, den Subtrahenden zu zerlegen. Nach der Zerlegung des Subtrahenden können zuerst die Zehner und dann die Einer subtrahiert werden oder umgekehrt, zuerst die Einer und dann die Zehner (vgl. Wittmann & Müller, 2019, S. 164). Diese Formen der Strategie des *schrittweisen Rechnens* werden in den Abbildungen 18 und 19 aufgezeigt.

45 - 21 = 24
45 - 20 = 25
25 - 1 = 24

Abbildung 18: Schrittweises Rechnen ohne Zehnerübergang (1. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

45 - 21 = 24
45 - 1 = 44
44 - 20 = 24

Abbildung 19: Schrittweises Rechnen ohne Zehnerübergang (2. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

Auch Aufgaben mit Zehnerübergang lassen sich mit dieser Strategie gut lösen. In Abbildung 20 wird im ersten Teilschritt bis zum letzten Zehner subtrahiert. Danach erfolgt die Subtraktion der Zehner. Im letzten Teilschritt werden die restlichen Einer vom zweiten Teilergebnis abgezogen. Eine weitere Notationsform ist in Abbildung 21 dargestellt. Hier werden zunächst die Zehner vom Minuenden subtrahiert. Anschließend erfolgt die Subtraktion bis zum letzten Zehner und im letzten Teilschritt werden die restlichen Einer vom zweiten Teilergebnis abgezogen.

83 - 35 = 48
83 - 3 = 80
80 - 30 = 50
50 - 2 = 48

Abbildung 20: Schrittweises Rechnen mit Zehnerübergang (1. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

83 - 35 = 48
83 - 30 = 53
53 - 3 = 50
50 - 2 = 48

Abbildung 21: Schrittweises Rechnen mit Zehnerübergang (2. Form)
Quelle: Eigene Darstellung

Die verschiedenen Lösungswege beim *schrittweisen Rechnen* können mit unterschiedlichen Materialien, wie zum Beispiel Rechenrahmen, Hundertertafel oder Rechenstrich festgehalten werden. Darüber hinaus kann diese Strategie in verschiedenen Notationsformen dargestellt werden (vgl. PADBERG & BENZ, 2021, S. 139; RADATZ et al., 1998, S. 47ff.).

3. *Mischform*

Die Mischform findet auch in Subtraktionsaufgaben ihre Anwendung und ist eine Vermischung aus *stellenweisem und schrittweisem Rechnen*. Bei dieser Strategie wird der Minuend und der Subtrahend in ihre Stellenwerte zerlegt. Zuerst werden die Zehnerstellen voneinander subtrahiert und anschließend wird schrittweise weitergerechnet (vgl. Götze et al., 2020, S. 104; Padberg & Benz, 2021, S. 140; Schipper, 2009, S. 131). Es ist jedoch zu beachten, dass im zweiten Teilschritt die restlichen Einer des Minuenden addiert werden, da im ersten Teilschritt nur die Zehner berechnet werden. Das Ergebnis der letzten Teilaufgabe ist das Endergebnis. Die Abbildung 22 zeigt die Aufgabe 64 - 32, die mithilfe der Strategie *Mischform* gelöst werden kann. Zunächst werden der Minuend und der Subtrahend stellenweise zerlegt und anschließend werden die Zehner voneinander subtrahiert. Dann folgt das schrittweise Rechnen, indem zuerst die Einer des Minuenden dazu addiert werden. Zum Schluss werden die Einer des Subtrahenden vom Teilergebnis subtrahiert.

64 - 32 = 32
60 - 30 = 30
30 + 4 = 34
34 - 2 = 32

Abbildung 22: Mischform
Quelle: Eigene Darstellung

4. *Ableiten (operative Beziehungen nutzend)*

Das *Ableiten* ist eine Strategie, die mehrere Vorgehensweisen unterscheidet. Ähnlich zur Addition gibt es die *Hilfsaufgabe*. Bei der *Hilfsaufgabe* werden die Zahlen auf- oder abgerundet, um eine einfachere Aufgabe zu erhalten. Wenn der Subtrahend im ersten Schritt um einen bestimmten Wert erweitert wird, dann muss im zweiten Schritt der zu viel abgezogene Wert wieder addiert werden (vgl. Götze et al., 2020, S. 103f., Wittmann & Müller, 2019, S. 164, Schipper, 2009, S. 131f.). In Abbildung 23 wird diese Strategie *Ableiten* am Beispiel der Aufgabe 86 - 39 veranschaulicht. Im ersten Schritt wird der Subtrahend auf den nächsten Zehner aufgerundet, indem um 1 erhöht und dann vom Minuenden abgezogen wird. Im zweiten Schritt wird der subtrahierte Wert, in diesem Fall die 1, wieder addiert.

86 - 39 = 47
86 - 40 = 46
46 + 1 = 47

Abbildung 23: Hilfsaufgabe
Quelle: Eigene Darstellung

Eine weitere Vorgehensweise ist das *Vereinfachen*. Diese Strategie basiert auf dem *Gesetz der Konstanz der Differenz* an. Dabei werden der Minuend und der Subtrahend gleichsinnig verändert, indem sie um die gleiche Zahl vergrößert oder verkleinert werden. Der Minuend und der Subtrahend werden gleichsinnig verändert (vgl. Götze et al., 2020, S. 103f.; Wittmann & Müller, 2019 S. 164; Schipper, 2009, S. 131f.). Das Ergebnis bleibt unverändert. Für die Aufgabe 48 - 13 kann eine vorteilhaftere Aufgabe genutzt werden, indem sowohl der Minuend als auch der Subtrahend gleichsinnig um 2 vergrößert werden. Dadurch entsteht die Aufgabe 50 - 15 mit dem gleichen Ergebnis (siehe Abbildung 24).

$$\mathbf{48 - 13 = 35}$$
$$\downarrow{+2} \qquad \downarrow{+2}$$
$$\mathbf{50 - 15 = 35}$$

Abbildung 24: Vereinfachen
Quelle: Eigene Darstellung

$$\underline{\mathbf{80 - 60 = 20}}$$
$$\mathbf{8 - 6 = 2}$$

Abbildung 25: Analogieaufgabe
Quelle: Eigene Darstellung

Auch bei Subtraktionsaufgaben können *Analogieaufgaben* gebildet werden. Die Strategie *Analogie* eignet sich für Aufgaben, die mit verwandten Aufgabentypen einfacher gelöst werden können (vgl. Padberg & Benz, 2021, S. 140). Zum Beispiel kann die Aufgabe 80 - 60 mit Hilfe einer *Analogieaufgabe* 8 - 6 leichter gelöst werden (siehe Abbildung 25).

5. *Halbieren*

Ähnlich wie bei der Strategie *Verdoppeln* beim Lösen von Additionsaufgaben, gibt es bei der Subtraktion die Strategie *Halbieren*. Das Ziel dieser Strategie ist die Nutzung von einfacheren Aufgaben. Beim *Halbieren* wird der Minuend halbiert und die Hälfte wird dann vom ganzen Minuenden abgezogen. Anschließend werden die restlichen Einer des Subtrahenden subtrahiert (vgl. Schipper, 2009, S. 131, S. 133). Die Abbildung 26 stellt das *Halbieren* am Beispiel der Aufgabe 48 - 26 dar. Zuerst wird der Minuend halbiert und die Hälfte davon vom ursprünglichen Minuenden abgezogen.

$$\underline{\mathbf{48 - 26 = 22}}$$
$$\mathbf{48 - 24 = 24}$$
$$\mathbf{24 - 2 = 22}$$

Abbildung 26: Halbieren
Quelle: Eigene Darstellung

Anschließend werden die restlichen Einer des Subtrahenden vom Zwischenergebnis abgezogen. Das *Halbieren* erfordert ein Auswendiglernen sowie eine Automatisierung beim Lösen von Aufgaben. Diese Strategie lässt sich anhand verschiedener Materialien, wie zum Beispiel dem Rechenstrich, gut veranschaulichen (vgl. SCHIPPER, 2009, S. 133).

6. *Ergänzen*

Eine weitere Strategie zur Lösung von Subtraktionsaufgaben ist das *Ergänzen*. Diese Strategie ist besonders vorteilhaft, wenn der Minuend und der Subtrahend nahe beieinander liegen oder wenn sich der Subtrahend in der Nähe des nächsten Zehners befindet (vgl. PADBERG & BENZ, 2021, S. 204). Beim *Ergänzen* wird der Subtrahend schrittweise um die jeweiligen Einer- und Zehnerwerte des Minuenden ergänzt. Das Endergebnis ergibt sich aus der Addition der Ergänzungen (vgl. GÖTZE et al., 2020, S. 103; PADBERG & BENZ, 2021, S. 140, S. 204). Die Abbildung 27 zeigt das *Ergänzen* anhand der Aufgabe 52 - 27. Hierbei wird die Subtraktionsaufgabe in eine Additionsaufgabe umgewandelt. Der Minuend 52 wird zur Summe und der Subtrahend wird zum ersten Summanden. Dann wird bis zum nächsten Zehner gerechnet und die restlichen Zehner und Einer bis zur Zahl 52 ergänzt. Das *Ergänzen* kann auch als *Sonderfall* der Strategie des *schrittweisen Rechnens* angesehen werden (vgl. PADBERG & BENZ, 2021, S. 204). Beim *Ergänzen* sind verschiedene Notationsformen möglich, die mit Materialien wie dem Rechenrahmen oder mit Zahlenbildern dargestellt werden können (vgl. WITTMANN & MÜLLER, 2019, S. 164f.; RADATZ et al., 1998, S. 55). Der Rechenstrich eignet sich besonders gut für diese Strategie (vgl. PADBERG & BENZ, 2021, S. 204; WITTMANN & MÜLLER, 2019, S. 164). Diese Strategie kann als Vorbereitung für die schriftliche Subtraktion im Sinne der *Auffülltechnik* eingesetzt werden (vgl. PADBERG & BENZ, 2021, S. 204).

$$\underline{52 - 27 = 25}$$
$$27 + \_\_ = 52$$
$$27 + 3 = 30$$
$$30 + 22 = 52$$

Abbildung 27: Ergänzen
Quelle: Eigene Darstellung

3.2.3 Verankerung im Bildungsplan

Die Kultusministerkonferenz (KMK) hat ein Konzept von Bildungsstandards für den Primarbereich entwickelt, in dessen Mittelpunkt die fachbezogenen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler stehen (vgl. STÄNDIGE KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND, Mathematik, 2004, S. 2). Insbesondere die Förderung mathematischer Kompetenzen ist ein zentraler Aspekt des Bildungsauftrags der Primarstufe. Im Fach Mathematik wird zwischen prozessbezogenen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden, welche untrennbar miteinander verbunden sind (vgl. ebd., S. 6). Für die Anwendung von Rechenstrategien sind folgende prozessbezogenen Kompetenzen zentral (vgl. ebd., S. 9ff.):

- *Mathematisch argumentieren*
- *Mathematisch kommunizieren*
- *Probleme mathematisch lösen*
- *Mathematisch darstellen*
- *Mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten*

Bei der Kompetenz *Mathematisch argumentieren* entwickeln die „ […] Schülerinnen und Schüler ein Bewusstsein für strittige Fragen zu mathematischen Gegenständen und ein Bedürfnis, diese überzeugend aufzuklären“ (ebd., S. 10). Darüber hinaus hinterfragen und überprüfen sie mathematische Aussagen und stellen Vermutungen und Begründungen zu mathematischen Zusammenhängen an (vgl. ebd.).

Die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* zielt darauf ab, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Überlegungen zu mathematischen Sachverhalten, ihre Lösungswege und Ergebnisse unter Verwendung geeigneter Medien beschreiben und erläutern (vgl. ebd.).

Eine weitere prozessbezogene Kompetenz in Bezug auf die Anwendung von Rechenstrategien ist die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen*. Bei dieser Kompetenz entwickeln die Schülerinnen und Schüler Lösungsstrategien, wie zum Beispiel systematisches Probieren oder das Nutzen von Analogien. Sie wählen heuristische Hilfsmittel aus und nutzen diese (vgl. STÄNDIGE KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND, Mathematik, 2004, S. 11).

Die Kompetenz *Mathematisch darstellen* beinhaltet „ […] das Auswählen von sowie das verständige Umgehen mit bildlichen, symbolischen, materiellen, verbal-sprachlichen sowie grafisch-visuellen und tabellarischen Darstellungen, die mathematische Objekte und Sachverhalte repräsentieren“ (ebd., S. 11). Darüber hinaus wählen die Schülerinnen und Schüler „ […] geeignete Darstellungsformen für das Bearbeiten mathematischer Fragestellungen aus und nutzen und entwickeln diese“ (ebd.). Sie entwickeln die Fähigkeit, eine Darstellungsform in eine andere zu übertragen, diese miteinander zu vergleichen und zu bewerten (vgl. ebd., S. 12).

Die Kompetenz *Mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten* umfasst „ […] den fachlich sicheren Umgang mit den im Mathematikunterricht der Primarstufe relevanten mathematischen Objekten […]“ (ebd.). Bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben- und Problemstellungen setzen die Schülerinnen und Schüler mathematische Werkzeuge, wie zum Beispiel digitale Werkzeuge, sachgerecht ein (vgl. ebd.).

Die inhaltsbezogenen Kompetenzen orientieren sich an den mathematischen Leitideen (vgl. ebd.). Die Anwendung von Rechenstrategien trägt zur Leitidee *Zahl und Operation* bei (vgl. ebd., S. 13). Diese Leitidee beinhaltet „ […] das sichere Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren unter sinntragender und flexibler Nutzung von Rechenstrategien, Rechengesetze und Kontrollverfahren“ (ebd.). Beim Einsatz von Rechenstrategien verfügen die Schülerinnen und Schüler „ […] über ein Operationsverständnis zu den vier Grundrechenarten und erkennen und nutzen die Zusammenhänge zwischen den Operationen“ (ebd., S. 14). Darüber hinaus entwickeln sie ein Verständnis für mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien zu den vier Grundrechenarten und lernen diese flexibel einzusetzen. Die Schülerinnen und Schüler können verschiedene

Rechenwege beschreiben, vergleichen und bewerten (vgl. STÄNDIGE KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND, Mathematik, 2004, S. 14).

Nach den Leitgedanken zum Kompetenzerwerb des Bildungsplans für die Grundschule in Baden-Württemberg ist es eine zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts, die Schülerinnen und Schüler für den mathematischen Gehalt alltäglicher Situationen und Phänomene zu sensibilisieren und sie anzuleiten, Probleme mit mathematischen Mitteln zu lösen (vgl. MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG, Mathematik, 2016, S. 3). Das Fach Mathematik leistet einen wichtigen Beitrag zu den Leitperspektiven. Der Umgang mit Rechenstrategien ist unter dem Aspekt Prävention und Gesundheitsförderung (PG) verankert. Die Schülerinnen und Schüler lernen mit Lernstrategien umzugehen und erwerben die Fähigkeit diese anzunehmen und zu nutzen (vgl. ebd.). Die Leitperspektive Medienbildung (MB) greift den Umgang mit Medien im Mathematikunterricht auf (vgl. ebd., S. 4). Der Einsatz mit Medien findet „ […] Anwendung sowohl bei der Beschaffung von Informationen als auch als Hilfsmittel beim Problemlösen zum Beispiel bei der Visualisierung von mathematischen Inhalten wie Diagrammen“ (ebd.). Die Schülerinnen und Schüler erweitern ihre Kompetenzen im Bereich der Medienbildung und lernen den Umgang mit Medien kennen. Dabei entwickeln sie auch ein Verständnis für das Erkennen von Grenzen mit Medien (vgl. ebd.).

Ähnlich wie die Kultusministerkonferenz (KMK) orientiert sich der Bildungsplan der Grundschule in Baden-Württemberg an prozessbezogenen Kompetenzen und Standards für inhaltsbezogene Kompetenzen, die miteinander verzahnt sind (vgl. ebd., S. 5). Bei der Anwendung von Rechenstrategien stehen folgende prozessbezogene Kompetenzen im Vordergrund (vgl. ebd., S. 6):

- *Kommunizieren*
- *Argumentieren*
- *Problemlösen*
- *Darstellen*

Die Kompetenz *Kommunizieren* zielt darauf ab, dass die Schülerinnen und Schüler ihre eigenen Denk- und Vorgehensweisen beschreiben und lernen die Lösungswege anderer nachvollziehen und verstehen lernen (vgl. MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG, Mathematik, S. 6).

Die Kompetenz *Argumentieren* umfasst die „ […] Sicherheit, um mathematische Aussagen sprachlich zu fassen, Vermutungen anzustellen, diese zu hinterfragen und zu überprüfen, Lösungswege zu begründen und zu diskutieren, verschiedene Standpunkte einzubringen und sich mit unterschiedlichen Sichtweisen auseinanderzusetzen“ (ebd.).

Beim *Problemlösen* entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Bereitschaft und die Fähigkeit, „ […] Probleme zu erfassen, zu beschreiben, unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten auszuprobieren, zunehmend zu systematisieren und Lösungsstrategien zu finden […]“ (ebd.).

In Bezug auf die Visualisierung von Rechenstrategien am Rechenstrich ist die Kompetenz *Darstellen* von zentraler Bedeutung. Dazu gehört das Dokumentieren von Vorgehensweisen und Arbeitsergebnissen. Die Schülerinnen und Schüler präsentieren eigene Ideen, Lösungswege und Ergebnisse und tauschen sich mit anderen darüber aus. Zudem lernen sie, verschiedene Darstellungsformen zu vergleichen und zu bewerten (vgl. ebd.).

In den Standards für inhaltsbezogene Kompetenzen ist der Einsatz von Rechenstrategien unter dem Aspekt *Zahlen und Operationen* enthalten (vgl. ebd. S. 12). Eine wichtige Teilkompetenz bei der Anwendung von Rechenstrategien ist das Verstehen und die aufgabenadäquate Nutzung von strategischen Werkzeugen des Zahlenrechnens. Darüber hinaus sind die Schülerinnen und Schüler in der Lage, eigene Rechenwege zu beschreiben, zu vergleichen und zu bewerten (vgl. ebd., S. 14). Bei der Visualisierung von Rechenstrategien am Rechenstrich entwickeln die Schülerinnen und Schüler mathematische Darstellungen und nutzen Materialien zur Darstellung mathematischer Sachverhalte (vgl. ebd., S. 16.).

3.2.4 Der Rechenstrich als Veranschaulichungsmittel

Wie bereits in Abschnitt 3.2.2 erläutert wurde, lassen sich viele Rechenstrategien zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Hunderterraum anschaulich am Rechenstrich darstellen. Der Rechenstrich wird auch als der *leere Zahlenstrahl* oder *Zahlenstrich* bezeichnet. Er wird in den Niederlanden bereits seit vielen Jahren erfolgreich im Grundschulunterricht eingesetzt (vgl. KLEIN et al., 1998, S. 443; LORENZ, 2004, S. 96). Auch in Deutschland wird der Rechenstrich zunehmend im Mathematikunterricht eingesetzt.

Dabei handelt es sich um einen einfachen Strich, der keine Beschriftung oder Skalierung enthält (vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER, 2008, S. 253). Der Rechenstrich dient als individuelle Skizze und orientiert sich am ordinalen Zahlaspekt (vgl. KÄPNICK & BENÖLKEN, 2020, S. 187). Er kann für verschiedene Zwecke eingesetzt werden und eignet sich „ […] als gute Orientierungshilfe beim Vergleichen und Ordnen von Zahlen sowie beim Erkennen der Zahlstruktur und von Analogien im Zahlsystem“ (ebd.). Darüber hinaus wird der Rechenstrich „ […] zum Darstellen der vier Grundrechenarten und rechnerischer Beziehungen, wie z. B. von Tausch- und Umkehrbeziehungen“ verwendet (ebd.). Im Gegensatz zu einem maßstabsgetreuen Zahlenstrahl können am Rechenstrich eigene Konstruktionen dargestellt werden. Dabei muss am Rechenstrich „ […] nicht unbedingt ein vollständiger Zahlenstrahl gezeichnet werden, sondern es genügen Ausschnitte, die die wesentlichen Zahlen und Beziehungen enthalten“ (LORENZ, 2004, S. 96). Hierzu werden nicht nur die Zahlen am Rechenstrich gezeichnet, sondern auch die entsprechenden Denk- und Rechenbewegungen. Vor dem Einsatz der Rechenstrategien am Rechenstrich ist es sinnvoll und auch entscheidend, eine geeignete Strategie für die jeweilige Aufgabe auszuwählen (vgl. ebd.). Die Verwendung individuell erstellter Zahlenstrahlen führt zu einem flexiblen Vorstellungsvermögen, sodass die Zahlen keine feste räumliche Beziehung einnehmen, sondern variieren können (vgl. ebd., S. 98).

Am Rechenstrich können Additions- und Subtraktionsaufgaben im Hunderterraum veranschaulicht werden, indem die einzelnen Rechenschritte mit Pfeilen oder Linien gekennzeichnet werden (vgl. RADATZ et al., 1998, S. 58). Die einzelnen Rechenschritte können durch die Angabe der Sprungweite sowie des Zwischen- und Endergebnisses auf dem Rechenstrich gekennzeichnet werden (vgl. SELTER & SPIEGEL, 1997, S. 64). Eine exakte Abbildung der Rechenoperation auf dem Rechenstrich ist nicht erforderlich. Vielmehr geht es darum, dass die „ […] Vorstellungen vom Vorwärts- und Rückwärtsgehen, vom Rechnen in einem, zwei oder mehr Schritten und von mehr oder weniger großen Sprüngen, die mit den Rechenoperationen verbunden werden, am Rechenstrich gezeigt werden“ (RADATZ et al., 1998, S. 58). Dabei geht es weniger um eine genaue Festlegung oder Präzision der Zeichen der Rechenpfeile, sondern vielmehr um die Darstellung von Rechenstrategien am Rechenstrich (vgl. ebd.).

Als Grundlage für die Anwendung von Rechenstrategien am Rechenstrich ist ein kognitives Schemata von Zahlen erforderlich, das sich auf das sogenannte *Triple-Code-Modell (Triple-Code-Model)* von Dehaene zurückführen lässt (vgl. DEHAENE, 1992, S. 30ff.). Das *Triple-Code-Modell* besagt, dass es drei verschiedene mentale Repräsentationsebenen gibt, die die Verarbeitung von Zahlen im menschlichen Gehirn ermöglichen (vgl. DEHAENE & COHEN, 1995, S. 85). Die Repräsentation von Zahlen kann mental in drei verschiedenen Codes erfolgen (vgl. ebd., S. 85f.):

- Im *auditiven verbalen Zahlencode* werden Zahlen als syntaktisch organisierte Wortfolgen wie beispielsweise /*achtzehn*/ dargestellt.
- Im *visuellen arabischen Zahlencode* werden Zahlen in arabischer Form als Ziffernfolgen auf einem internen visuell-räumlichen Medium repräsentiert.
- Im *analogen Zahlencode* werden Mengen oder Größen, die mit einer bestimmten Zahl verbunden sind, abgerufen und mit anderen numerischen Größen in Beziehung gesetzt.

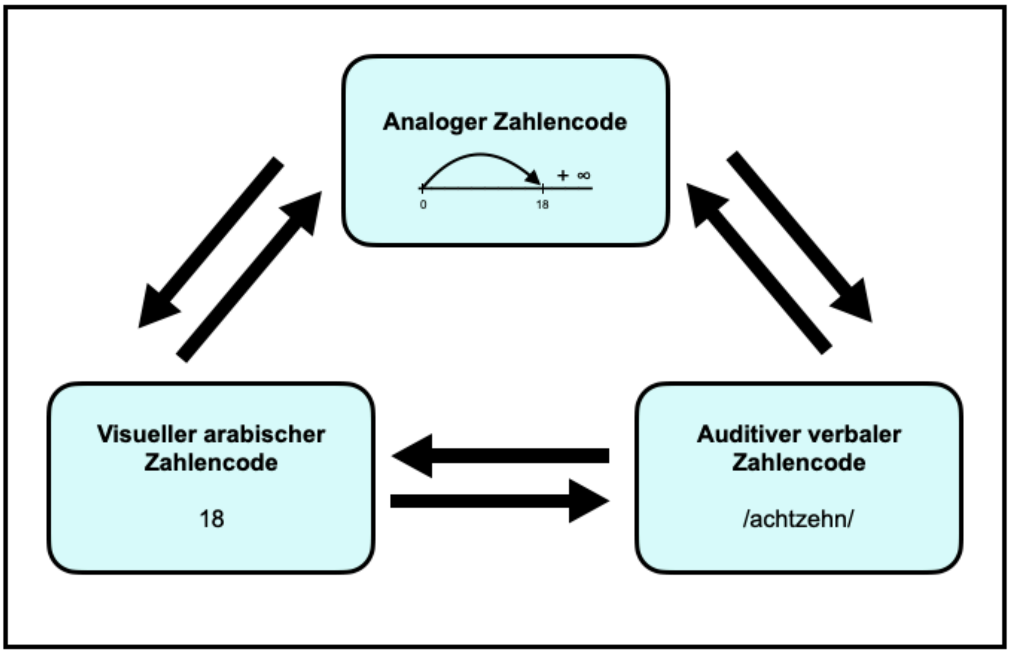


Abbildung 28: Triple-Code-Modell
Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Dehaene, 1992, S. 31

In Abbildung 28 sind die drei verschiedenen Zahlencodes des *Triple-Code-Modells* in der Anordnung eines Dreiecks dargestellt. Der Zugriff zu den Darstellungsebenen von Zahlen erfolgt über externe Reize (vgl. DEHAENE & COHEN, 1995, S. 86). Visuelle Identifizierungsprozesse ermöglichen eine schnelle Zuordnung von arabischen Ziffern zu identifizierten Ziffernfolgen in der visuellen arabischen Zahlform. Umgekehrt ermöglichen Ausgaberoutinen das Aufschreiben von Ziffernfolgen in der internen Repräsentation. Wenn eine Reihe von visuellen oder akustischen Objekten repräsentiert wird, dann kann die Anzahl dieser Objekte direkt extrahiert und durch spezielle Unterteilungs- und Schätzverfahren auf dem Zahlenstrahl veranschaulicht werden. Schließlich ist der verbale Code mit Eingaberoutinen verbunden, welche darauf abzielen, auditive oder schriftliche Sequenzen von Zahlenwörtern zu analysieren. Zudem ist der verbale Code auch mit Ausgaberoutinen verbunden, die es ermöglichen, diese Zahlen auszusprechen oder aufzuschreiben. Daher besteht der erste Schritt bei jeder Aufgabe darin, die eingegebenen Zahlen in einer geeigneten Notation darzustellen (vgl. ebd.).

Das *Triple-Code-Modell* geht davon aus, dass Zahlen in jeden für die jeweilige Aufgabe internen Code umgewandelt werden können. Darüber hinaus geht dieses Modell der Annahme nach, dass es eine direkte Verbindung zwischen dem arabischen Code und dem verbalen Code gibt, ohne eine Zwischenmengenrepräsentation zu durchlaufen (vgl. DEHAENE & COHEN, 1995, S. 86).

Verschiedene Rechenstrategien zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 können in vielfältiger Weise am Rechenstrich notiert werden. Allerdings sind nicht alle Strategien für dieses Arbeitsmaterial geeignet. Für die Addition im Zahlenraum bis 100 gibt es folgende Rechenstrategien, die für die Darstellung am Rechenstrich möglich sind. Dabei werden die Beispielaufgaben aus Abschnitt 3.2.2 mit Hilfe der App *Number Line* am Rechenstrich konstruiert.

1. Schrittweises Rechnen

Das *schrittweise Rechnen* können mit Hilfe des Rechenstrichs durchgeführt werden. Die Abbildungen 29 und 30 zeigen, wie die Beispielaufgabe 23 + 41 ohne Zehnerübergang auf verschiedene Weise skizziert werden kann.

eder Schritt wird als Rechensprung in Form eines Bogens von links nach rechts markiert. Die Zahl links am Rechenstrich repräsentiert den Ausgangswert, zu dem schrittweise addiert wird. Die Zwischenergebnisse werden entlang der Linie eingetragen. Die Zahl rechts am Ende des Rechenstrichs steht für das Endergebnis der Aufgabe.

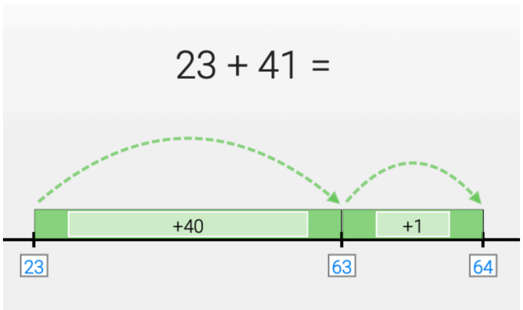


Abbildung 29: Schrittweises Rechnen am Rechenstrich ohne Zehnerübergang (1. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

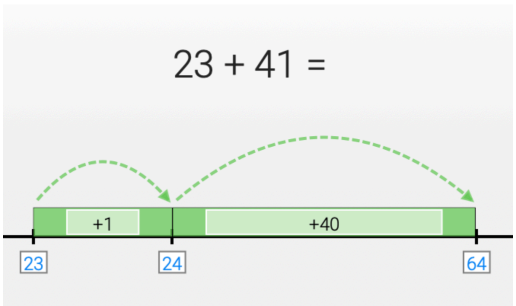


Abbildung 30: Schrittweises Rechnen am Rechenstrich ohne Zehnerübergang (2. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Die Strategie des *schrittweisen Rechnens* kann auch bei Aufgaben mit Zehnerübergang angewendet werden. Die folgenden Abbildungen 31 und 32 zeigen die Aufgabe 36 + 48 in verschiedenen Notationsformen am Rechenstrich.

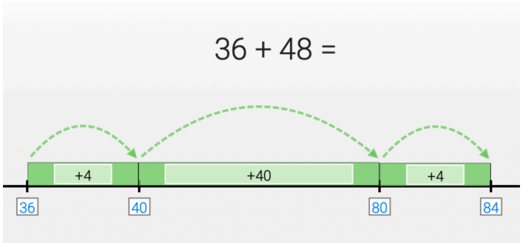


Abbildung 31: Schrittweises Rechnen am Rechenstrich mit Zehnerübergang (Zehnerergänzung, 1. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

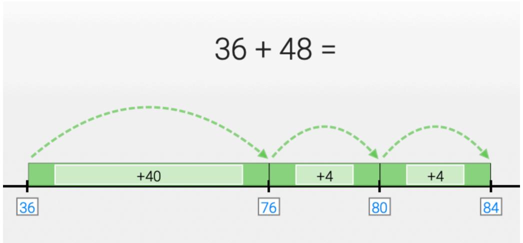


Abbildung 32: Schrittweises Rechnen am Rechenstrich mit Zehnerübergang (Zehnerergänzung, 2. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

2. Ableiten (operative Beziehungen nutzend)

Eine Strategie, die zum *Ableiten* gehört, ist die *Hilfsaufgabe*. Diese Strategie kann am Rechenstrich skizziert werden. Die folgende Aufgabe 26 + 39 kann mit der Strategie *Hilfsaufgabe* gelöst und am Rechenstrich skizziert werden (siehe Abbildung 33). Zunächst wird der zweite Summand aufgerundet, indem sein Wert um 1 erhöht wird. Dies wird durch einen großen Rechensprung von links nach rechts gekennzeichnet. Anschließend wird der erhöhte Wert wieder subtrahiert, indem ein kleiner Rechensprung von rechts nach links markiert wird.

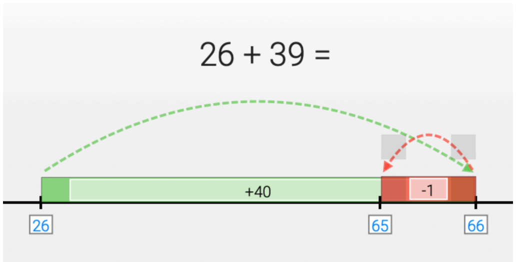


Abbildung 33: Hilfsaufgabe am Rechenstrich
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

3. Verdoppeln

Auch *Verdopplungsaufgaben* können mit Hilfe des Rechenstrichs veranschaulicht werden. Die Aufgabe 44 + 46 kann beispielsweise mit der *Verdopplungsaufgabe* gelöst werden (siehe Abbildung 34).

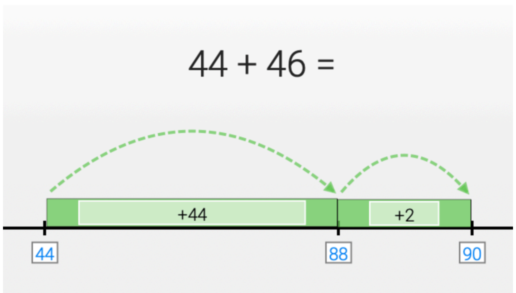


Abbildung 34: Verdoppeln am Rechenstrich
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Die Ausgangszahl 44, die links am Rechenstrich steht, wird verdoppelt und miteinander addiert. Dieser Schritt wird durch einen großen Rechensprung bis zum Zwischenergebnis markiert. Anschließend erfolgt die Berechnung der restlichen Einer des zweiten Summanden mit einem kleinen Rechensprung bis zum Endergebnis.

Auch für die Subtraktion gibt es folgende Rechenstrategien, die am Rechenstrich veranschaulicht werden können.

1. Schrittweises Rechnen

Das *schrittweise Rechnen* bei der Subtraktion kann auch für die Arbeit mit dem Rechenstrich genutzt werden. Im Gegensatz zur Addition findet bei der Subtraktion ein Richtungswechsel statt. Die einzelnen Rechenschritte werden durch Sprünge von rechts nach links am Rechenstrich markiert. Dabei beginnt die Zahl rechts am Rechenstrich. Von dieser Startzahl wird schrittweise subtrahiert. Die Zwischenergebnisse werden auf der Linie notiert. Die letzte Zahl links vom Rechenstrich gibt das Endergebnis an. Die Abbildungen 35 und 36 zeigen eine Aufgabe ohne Zehnerübergang, die unterschiedlich notiert werden können.

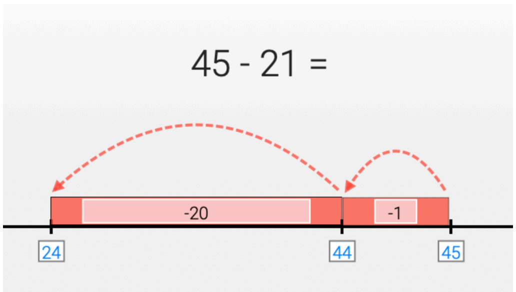


Abbildung 35: Schrittweises Rechnen am Rechenstrich ohne Zehnerübergang (1. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

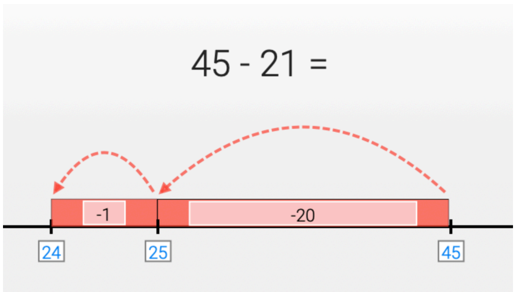


Abbildung 36: Schrittweises Rechnen am Rechenstrich ohne Zehnerübergang (2. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Die Strategie des *schrittweisen Rechnens* eignet sich besonders für Aufgaben mit Zehnerübergang. Die folgende Aufgabe 83 - 35 kann am Rechenstrich unterschiedlich skizziert werden (siehe Abbildungen 36 und 37).

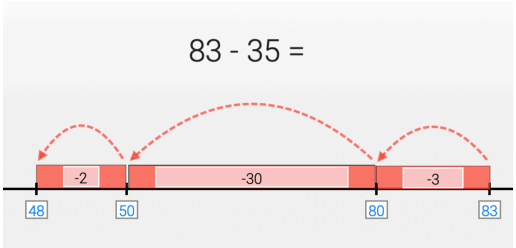


Abbildung 37: Schrittweises Rechnen am Rechenstrich mit Zehnerübergang
(1. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

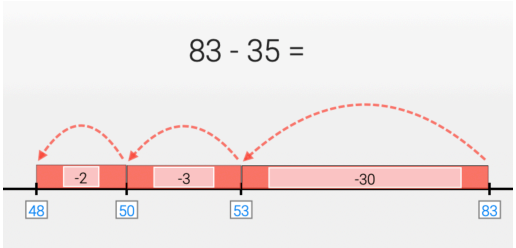


Abbildung 38: Schrittweises Rechnen am Rechenstrich mit Zehnerübergang
(1. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

2. Ableiten (operative Beziehungen nutzend)

Beim *Ableiten* kann die *Hilfsaufgabe* zur Lösung einer Subtraktionsaufgabe verwendet werden. Die *Hilfsaufgabe* kann zum besseren Verständnis am Rechenstrich dargestellt werden (siehe Abbildung 39). Zunächst wird der Subtrahend um einen Wert erhöht und vom Minuenden subtrahiert. Es wird ein großer Rechensprung von rechts nach links gezogen. Anschließend wird der zu viel abgezogene Wert wieder addiert und mit einem kleinen Rechensprung von links nach rechts markiert.

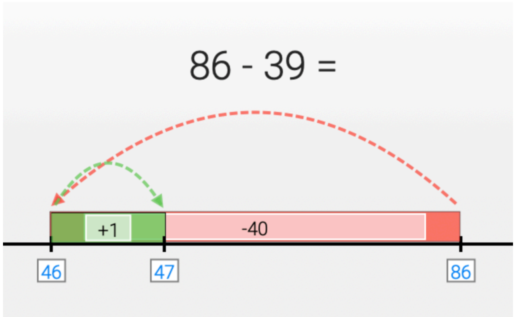


Abbildung 39: Hilfsaufgabe am Rechenstrich
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

3. Halbieren

Eine Subtraktionsaufgabe kann auch einfacher gelöst werden, wenn man die Strategie *Halbieren* anwendet. Die Ausgangszahl wird halbiert und die Hälfte wird von dieser Ausgangszahl subtrahiert. Von der Startzahl, die sich rechts am Rechenstrich befindet, wird ein großer Rechensprung zum Zwischenergebnis markiert. Danach werden die restlichen Einer vom zweiten Summanden subtrahiert und mit einem Rechensprung gekennzeichnet (siehe Abbildung 40).

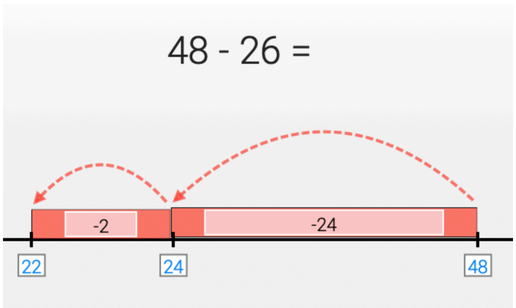


Abbildung 40: Halbieren am Rechenstrich
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

4. Ergänzen

Eine weitere Möglichkeit, eine Subtraktionsaufgabe mit Hilfe des Rechenstrichs zu lösen, ist das *Ergänzen*. Die Aufgabe 52 - 27 kann als Umkehraufgabe 27 + __ = 52 am Rechenstrich anschaulich dargestellt werden. Dabei ist auf die Richtung am Rechenstrich zu achten. Beim *Ergänzen* erfolgen die Rechensprünge von links nach rechts (siehe Abbildung 41).

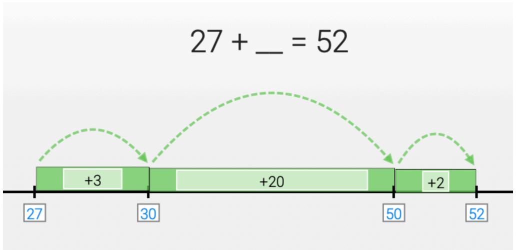


Abbildung 41: Ergänzen am Rechenstrich
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Im Anhang ist eine umfassende tabellarische Übersicht beigefügt, die alle Aufgabentypen im Hunderterraum mit den möglichen Rechenstrategien am Rechenstrich beinhaltet.

3.3 Analyse der App „Number Line“

Damit eine App sinnvoll und gewinnbringend im Mathematikunterricht eingesetzt werden kann, muss sie auf ihre Qualität überprüft werden. Zur Analyse und Beurteilung von Apps eignet sich nach Ladel und Kortenkamp (2015) die Tätigkeitstheorie, die sich am ACAT-Modell orientiert. Die Abkürzung des Modells *ACAT* steht für *Artifact Centric Activity Theory.* Diese Tätigkeitstheorie dient als Instrument zur Gestaltung und Analyse von virtuellen Arbeitsmaterialien (vgl. LADEL & KORTENKAMP, 2016, S. 26).

Ein detaillierter Einblick in die Tätigkeitstheorie auf der Basis des ACAT-Modells nach Ladel und Kortemkamp (2015) wird im Folgenden anhand der App *Number Line* vorgestellt.

Die Tätigkeitstheorie beinhaltet eine Struktur aus einzelnen Elementen, die zueinander in Beziehung stehen und sich wechselseitig beeinflussen. Die Struktur besteht aus den Elementen Subjekt (S), Objekt (O), Artefakt (A), Regeln (R) und Gruppe (G). Das Subjekt (S) bezieht sich auf die einzelnen Schülerinnen und Schüler. Beim Objekt (O) handelt es sich um den mathematischen Unterrichtsinhalt, in diesem Fall die Arbeit mit dem Zahlenstrahl. Damit eine Vermittlung zwischen dem Subjekt und dem Objekt stattfinden kann, kommt das Werkzeug Artefakt zum Tragen. Das vermittelnde Artefakt (A) ist die untersuchte App *Number Line*, welche eine Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt ermöglicht (vgl. ETZOLD et al., 2018, S. 91). Diese drei Hauptelemente bilden den horizontalen Grundstrang der Struktur dieser Theorie, die in Abbildung 42 dargestellt ist. Neben den Hauptelementen Subjekt, Artefakt und Objekt gibt es zwei weitere Nebenelemente, die mit dem Grundstrang verbunden sind. Die Regeln (R) beschreiben ausgehend vom mathematischen Objekt, die Verhaltensweisen der App. Bei der Nutzung der App spielt auch der situative

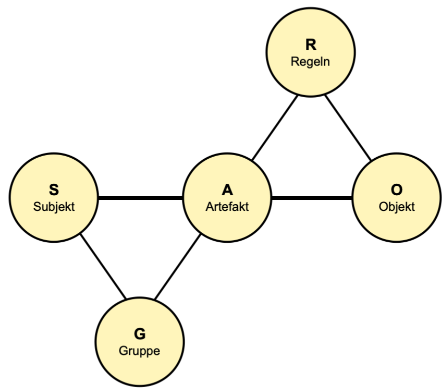


Abbildung 42: ACAT-Modell
Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Ladel und Kortenkamp, 2015, S. 152

Kontext eine wichtige Rolle. Der Einfluss der Gruppe (G) umfasst die gesamte Klassensituation im Unterricht. Die einzelnen Elemente der Struktur beschreiben ein Beziehungsgefüge, die in einem wechselseitigen Verhältnis zueinander stehen (vgl. ETZOLD et al., 2018., S. 91).

Die Beurteilung der App *Number Line* erfolgt anhand des *Review-Guides* von Etzold, Kortenkamp und Ladel (2018, S. 91ff.). Der *Review-Guide* orientiert sich an dem *ACAT-Modell* und besteht aus fünf Schritten. Die Schritte sind in folgender Reihenfolge durchzuführen:

Schritt 1: Was ist das mathematische Objekt der App?

Die zu analysierende App trägt den Namen *Number Line* und wurde von *The Math Learning Center* entwickelt. Die App ist ein digitales Lernwerkzeug für Schülerinnen und Schüler, insbesondere in der Grundschule, die digitale Medien wie Laptops, Tablets oder Computer nutzen. Sie dient der Visualisierung von Zahlenfolgen und veranschaulicht Strategien zum Zählen, Vergleichen, Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren. Es gibt eine Auswahl an Zahlenlinien mit ganzen Zahlen, Brüchen, Dezimalzahlen und negativen Zahlen. Zusätzlich kann eine benutzerdefinierte Zahlenlinie mit oder ohne Häkchen verwendet und ein eigenes Intervall festgelegt werden. Auf der Linie können Vorwärts- und Rückwärtssprünge mit individueller Beschriftung der Werte hinzugefügt werden (vgl. *The Math Learning Center*, 2022, o. S.). Für die Nutzung dieser App werden keine zusätzlichen Materialien benötigt. Lediglich Aufgaben, die selbst erstellt werden können, werden für die Bearbeitung der App benötigt.

Schritt 2: Wie interagieren Schülerinnen und Schüler mithilfe der App mit dem mathematischen Objekt?

Die App *Number Line* bietet den Schülerinnen und Schülern verschiedene Möglichkeiten, mit dem Zahlenstrahl zu interagieren. Um die Interaktionsmöglichkeiten dieser App für die Schülerinnen und Schüler mit dem mathematischen

Objekt beurteilen zu können, müssen die Interaktionsrichtungen zwischen den Komponenten Subjekt, Objekt und Artefakt genauer betrachtet werden. Es ergeben sich einzelne Teilfragen, die in einem Kreislauf zwischen den einzelnen Komponenten rotieren (vgl. ETZOLD et al., 2018, S. 94). Dieser Kreislauf ist in Abbildung 43 dargestellt.

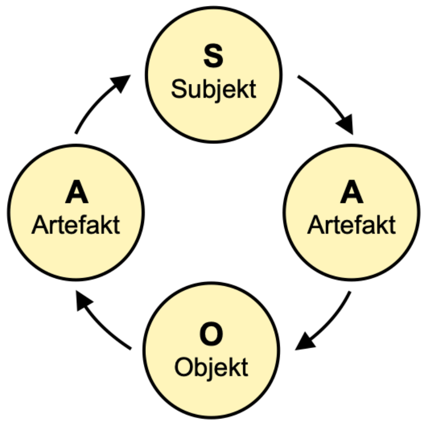


Abbildung 43: Kreislauf der einzelnen Komponenten
Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Etzold et al., 2018, S. 94

S → A: Welche Handlungen sind in der App möglich?

Während der Nutzung mit der App sind vielfältige Handlungen des Subjekts mit dem Artefakt möglich. Beim Öffnen der App wird dem Nutzer ein virtueller Zahlenstrahl auf dem gesamten Bildschirm angezeigt (siehe Abbildung 44). Am unteren Bildschirmrand befindet sich eine schmale Menüleiste mit verschiedenen Werkzeugoptionen. Für die Konstruktion eines Zahlenstrahls und dessen Anwendung können verschiedene Fingergesten getätigt werden. Dazu gehören das Antippen einer Option oder das Ziehen mit dem Finger beim Verschieben von Objekten. Bei der Auswahl bestimmter Optionen wird durch das Antippen ein zusätzliches Fenster mit einer neuen Auswahl erzeugt. Diese Auswahl bietet die Möglichkeit, die Konstruktionsart des Zahlenstrahls zu ändern, einen Zahlenwert oder Text manuell einzugeben und individuell zu gestalten oder mit verschiedenen Zeichenwerkzeugen eine Markierung oder Zeichnung zu erstellen. Außerdem können Rechensprünge oberhalb oder unterhalb der Linie sowie in Richtungsänderungen hinzugefügt, dupliziert und in verschiedenen Größen verändert werden.

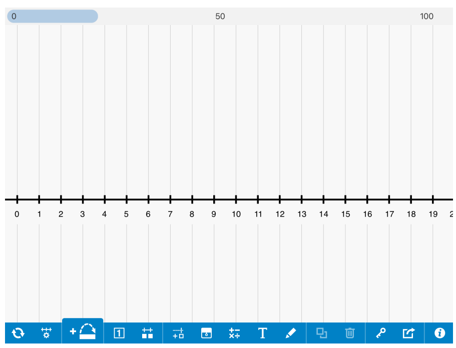


Abbildung 44: Arbeitsfläche der App Number Line
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Während des Lernprozesses kann ein sogenanntes Cover verwendet werden, um bestimmte Objekte auszublenden oder wieder sichtbar zu machen. Darüber hinaus können die erstellten Inhalte in der App gespeichert und über verschiedene Vermittlungsdienste geteilt werden.

A → O: Wie repräsentiert die App das mathematische Objekt?

Die App repräsentiert einen horizontalen Zahlenstrahl in einer zweidimensionalen Ansicht. Es kann ein leerer Zahlenstrahl ohne Zahlenwerte oder ein maßstabsgetreuer Zahlenstrahl mit unterschiedlichen Abstandswerten in voller Bildlänge dargestellt werden. Beim maßstabsgetreuen Zahlenstrahl werden über die gesamte Bildfläche Linien abgebildet, die einen besseren Überblick über die einzelnen Abstände der Zahlenwerte ermöglichen. Die untere Menüleiste bietet ein Tätigkeitsfeld mit verschiedenen Optionen für die Arbeit am Zahlenstrahl. Auf dem Zahlenstrahl können Rechensprünge in verschiedenen Größen, Zahlenwerte, Texte sowie Zeichnungen dargestellt werden. Die Darstellung der einzelnen Objekte erscheint farblich.

O → A: Wie beeinflusst das Objekt das Verhalten der App?

Der horizontale Zahlenstrahl dient als virtuelles Werkzeug für verschiedene mathematische Problemstellungen. Während der Arbeit am Zahlenstrahl können vielfältige Tätigkeiten am Zahlenstrahl durchgeführt werden. Die Auswahl der Rechensprünge am Zahlenstrahl erleichtert das Verständnis für die Lösungswege der einzelnen Rechenoperationen, die mit unterschiedlichen Rechenstrategien gelöst werden können. So können auch komplexere Aufgaben mit Hilfe verschiedener Strategien anschaulich am Zahlenstrahl dargestellt werden.

A → S: Welche Erfahrungen können Schülerinnen und Schüler dadurch machen?

Die App *Number Line* ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern, durch die Arbeit mit dem virtuellen Zahlenstrahl individuelle Lernerfolge zu erzielen.

Durch die Auswahl verschiedener Fingergesten können die Schülerinnen und Schüler beliebige Handlungen auf dem Zahlenstrahl ausführen. Dabei erwerben sie nicht nur wichtige Grundfertigkeiten im Umgang mit dem Zahlenstrahl, sondern zusätzlich wird auch die Motorik der Finger gefördert. Über das Fingersystem auf der Bildfläche werden die Schülerinnen und Schüler zu verschiedenen Fingerbewegungen angeleitet. Darüber hinaus werden verschiedene Medienkompetenzen gefördert, indem die Schülerinnen und Schüler einen verantwortungsvollen Umgang mit digitalen Medien erlernen.

Schritt 3: Wie entwickelt sich die Interaktion?

Die Nutzung mit der App *Number Line* ermöglicht verschiedene Interaktionen in Tätigkeiten, Handlungen und Operationen. Die Tätigkeiten umfassen übergeordnete, an Motiven orientierte Interaktionen mit der App (vgl. ETZOLD et al., 2018, S. 94). Mögliche Tätigkeiten sind zum Beispiel das Erstellen eines Zahlenstrahls mit verschiedenen Maßstäben, das Hinzufügen von Rechensprüngen sowie das Eintragen von Zahlenwerten, Texten oder Zeichnungen auf dem Zahlenstrahl. In dieser App können verschiedene Handlungen auf dem Zahlenstrahl ausgeführt werden. Als Handlungen werden zielgerichtete, individuelle Interaktionen bezeichnet (vgl. ebd.). Eine mögliche Handlung ist das Verschieben des Zahlenstrahls nach links oder rechts. Durch diese Bewegung können verschiedene Standpunkte auf dem Zahlenstrahl eingenommen werden. Auch das Auswählen von Rechensprüngen, Zahlen- und Textfeldern, Zeichnungen oder Covers kann als zielgerichtete Handlung verstanden werden (siehe Abbildung 45). Die Operationen beziehen sich auf verinnerlichte Interaktionen, die kein weiteres Nachdenken erfordern (vgl. ebd.). Eine mögliche Operation kann das Hinzufügen eines Rechensprungs auf dem Zahlenstrahl und das Verschieben des Rechensprungs an eine andere Stelle durch Fingerbewegungen sein.

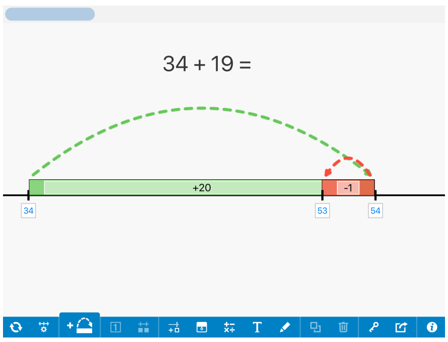


Abbildung 45: Darstellung von verschiedenen Optionen
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

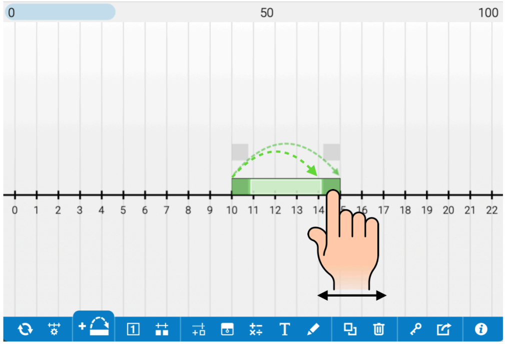


Abbildung 46: Darstellung von einem Rechensprung am Zahlenstrahl
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Außerdem kann die Größe des Rechensprungs durch das Ziehen mit dem Finger verändert werden (siehe Abbildung 46). Nach einem bestimmten Lernprozess werden die Handlungen zu Operationen, die kein weiteres Nachdenken erfordern und es ergeben sich neue Handlungsmöglichkeiten (vgl. Etzold et al., 2018, S. 94).

Schritt 4: Ist die App für die Vermittlung des mathematischen Objekts geeignet?

Die App *Number Line* bietet einen virtuellen Zahlenstrahl als Hilfsmittel für den arithmetischen Bereich. Aufgrund seines linearen Charakters eignet sich der Zahlenstrahl besonders zur Unterstützung informeller Denkstrategien. Die Markierungen auf dem Zahlenstrahl dienen als visuelle Darstellung von mentalen Bildern und tragen zur Entwicklung des Verständnisses für Zahlbeziehungen bei (vgl. Frykholm, 2010, S. 6). Darüber hinaus fördert der Zahlenstrahl kreative Lösungsstrategien und intuitives Denken. Am Zahlenstrahl werden Möglichkeiten geschaffen, eigene Lösungsstrategien zu entwickeln und das Denken zu verinnerlichen. Der Zahlenstrahl kann als Werkzeug zur Modellierung mathematischer Zusammenhänge und zur Veranschaulichung von Methoden, Denkfortschritten und Lösungsstrategien eingesetzt werden. Untersuchungen haben gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler bei der Verwendung eines leeren Zahlenstrahls eine höhere kognitive Aktivität zeigen als bei anderen mathematischen Modellen (vgl. ebd., S. 6f.).

Bei der Anwendung der App *Number Line* werden die im Folgenden aufgeführten mathematikdidaktischen Prinzipien berücksichtigt.

Beim *operativen Prinzip* geht es um die handlungsorientierte Erarbeitung von mathematischen Begriffen und Techniken. Operative Begriffe werden auf Handlungen zurückgeführt und als Operationen verinnerlicht.

Die operative Bearbeitung eines Lerninhalts beinhaltet die Herstellung vielfältiger Zusammenhänge und Beziehungen (vgl. Käpnick & Benölken, 2020, S. 62f.). Auch mit Hilfe der App kann ein operativer Zugang ermöglicht werden, indem verschiedene Aufgabenformate mit Hilfe von Rechenstrategien am Zahlenstrahl gelöst werden. Der Einsatz verschiedener Rechenstrategien trägt zum Erwerb sicherer und flexibler Rechenfertigkeiten bei (vgl. ebd., S. 63).

Das *E-I-S-Prinzip* wurde von Jerome Bruner entwickelt und charakterisiert die kognitive Entwicklung des Kindes auf verschiedenen Repräsentationsebenen. Er unterscheidet dabei zwischen einer enaktiven Ebene (Repräsentation durch Handlungen), einer ikonischen Ebene (Repräsentation durch Bilder oder Grafiken) und einer symbolischen Ebene (Repräsentation durch Worte oder Sprache) (vgl. Bruner, 1974, S. 16f., S. 49). Die Darstellung des Zahlenstrahls sowie der Rechensprünge kann auf der ikonischen Ebene betrachtet werden.

Das *Teil-Ganzes-Konzept* von Lauren B. Resnick beschreibt eine Interpretation von Zahlen als Teil-Ganzes-Beziehungen. Damit ist die Erkenntnis der vielfältigen Zerlegung und Zusammensetzung von Zahlen gemeint. Es ermöglicht eine Erweiterung des Zahlenverständnisses, die zum mathematischen Problemlösen und zur Interpretation von Zahlen beiträgt (vgl. Resnick, 1983, S. 114). Bei der Strategieentwicklung am Rechenstrich mit Hilfe der App wird der Aufbau eines Zahlenverständnisses gefördert, indem Zahlen zur Lösung einer Aufgabe in Einzelteile zerlegt und als Ganzes betrachtet werden können.

Für die Arbeitsfläche der App *Number Line* wurde ein klares und übersichtliches Design entwickelt. Der virtuelle Zahlenstrahl ist vor einem neutralen Hintergrund platziert, um Verwirrung oder Ablenkung zu vermeiden. Die Rechensprünge werden in zwei verschiedenen Farben (rot und grün) dargestellt, um die jeweilige Rechenrichtung anzuzeigen. Auch die Auswahl der verschiedenen Optionen in der schmalen Menüleiste am unteren Rand der Arbeitsfläche ist übersichtlich gestaltet. Die App bietet eine Bedienungsanleitung mit bildlicher Darstellung zum Nachlesen an. Diese ist jedoch nur in englischer Sprache verfügbar, was einen Nachteil der App darstellt. Ein weiterer Nachteil ist, dass die Darstellung der einzelnen Zahlen nicht den mathematisch-didaktischen Standards in der Grundschule entspricht. So weichen die Zahlen 4 und 7 von der didaktischen Schreibweise ab. Eine mögliche Verbesserung für die App wäre das Angebot einer größeren Sprachenvielfalt sowie eine Zoomfunktion, die einen Gesamt-überblick über den Zahlenstrahl ermöglicht.

Schritt 5: Wie kann die App in der Klassensituation verwendet werden?

Die App kann vielfältig im Mathematikunterricht eingesetzt werden. Bereits bei der Einführung des Zahlenstrahls erweist sich der Einsatz der App als sinnvoll. Durch die Übertragung vom Tablet auf das Whiteboard kann der Zahlenstrahl in vergrößerter Form vor der gesamten Klasse repräsentiert werden. Zusätzlich können die Zahlen auf dem Zahlenstrahl durch die Häkchenauswahl verortet werden. Die App eignet sich auch für den Unterricht zum Thema Rechenstrategien. Der virtuelle Zahlenstrahl ist eine hilfreiche Darstellungsmöglichkeit für die verschiedenen Notationen der jeweiligen Rechenstrategien. Mit der Option eines leeren Zahlenstrahls können die Schülerinnen und Schüler eigene Konstruktionen erstellen. Durch die Fingerbewegungen auf dem Zahlenstrahl können Rechensprünge in verschiedenen Größen dargestellt werden. Die App kann sowohl in Einzelarbeit als auch in Partner- oder Gruppenarbeit eingesetzt werden. Um Problem- oder Aufgabenstellungen mit anderen zu teilen, können die Schülerinnen und Schüler einen Screenshot erstellen und über Vermittlungsdienste versenden. Insbesondere für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler ist der Einsatz der App sinnvoll, um Schwierigkeiten bei mathematischen Konzepten zu erkennen und durch individuelle Fördermaßnahmen zu unterstützen. Der virtuelle Zahlenstrahl dient nicht nur der Darstellung von Zahlen, sondern zeigt auch die Beziehungen zwischen den Zahlen auf. Die App *Number Line* bietet vielfältige Möglichkeiten, Aufgaben- und Übungsformate im Bereich der Arithmetik zu lösen. Zudem knüpft sie an die Motivation der Schülerinnen und Schüler an, sich mit komplexen mathematischen Inhalten auseinanderzusetzen.

3.4 Aufarbeitung des aktuellen Forschungsstands

Im Rahmen des Forschungsprojektes *Flexibles Rechnen im Anfangsunterricht* führte Benz an der Pädagogischen Hochschule zu Heidelberg eine Studie durch, um die Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern bei Additions- und Subtraktionsaufgaben im Hunderterraum mit Hilfe von klinischen Interviews zu analysieren (vgl. BENZ, 2005, S. 1, S. 101). Ein Ziel der Studie war es, die Rechenstrategien von Schülerinnen und Schülern bei Additions- und Subtraktionsaufgaben im Verlauf des zweiten Schuljahres zu untersuchen (vgl. BENZ, 2005, S. 99f., S. 194f.). Sie ging der Frage nach, welche Rechenstrategien von den Schülerinnen und Schüler anwenden und ob sich für verschiedene Aufgabengruppen sowie Kindergruppen unterschiedliche Tendenzen feststellen lassen. Des Weiteren wurde untersucht, wie effektiv die einzelnen Strategien sind und ob sich Entwicklungstendenzen festgestellt lassen (vgl. ebd., S. 99f.). Dabei ermittelte sie unterschiedliche Erfolgsquoten für die verschiedenen Rechenstrategien.
Benz fand heraus, dass sich beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben vier Hauptstrategien herausbildeten. Zu Beginn des Schuljahres war das Ableiten die erfolgreichste Strategie, gefolgt von der Strategie des schrittweisen Rechnens. Die Strategie des stellenweisen Rechnens und die Mischform wurden ebenfalls eingesetzt. Im Laufe des Schuljahres nahm der Erfolg der Strategien des stellenweisen Rechnens, des schrittweisen Rechnens und der Mischform stetig zu. Im Gegensatz zu der Strategie Ableiten, die relativ konstant blieb (vgl. ebd., S. 194). Am Ende des Schuljahres war ein leichter Rückgang bei der Strategie des stellenweisen Rechnens sowie Ableiten zu beobachten, während die Nutzung der Strategien des schrittweisen Rechnens sowie der Mischform zunahm (vgl. ebd., S. 195).

In den Niederlanden führte Beishuizen (1993, S. 294, S. 303) eine Feldstudie an mehreren Schulen durch, um mentale Strategien und Materialien für die Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 in der zweiten Klasse zu untersuchen. Die Untersuchung konzentrierte sich auf den Vergleich der prozeduralen Effektivität und der Fehlerarten der Strategie des schrittweisen Rechnens (N10-Strategie) und der Strategie des stellenweisen Rechnens (1010-Strategie).

Darüber hinaus wurde der Einfluss unterstützender Bedingungen, wie die Verwendung von Rechenblöcken und der Hundertertafel, auf den Erwerb mentaler Strategien untersucht (vgl. BEISHUIZEN, 1993, S. 294, S. 303). Die Ergebnisse dieser Studie zeigen, dass die Häufigkeit des Einsatzes mentaler Strategien je nach Verwendung des Materials unterschiedlich verteilt ist. Die meisten Additions- und Subtraktionsaufgaben im Hunderterraum wurden häufig mit der Strategie des stellenweisen Rechnens unter Verwendung von Rechenblöcken gelöst. Hingegen wurde die Strategie des schrittweisen Rechnens vor allem dann eingesetzt, wenn Hunderterquadrate als Hilfsmittel verwendet wurden.Beim Einsatz mentaler Strategien ohne Material war das stellenweise Rechnen häufiger vertreten als das schrittweise Rechnen.
Hinsichtlich der Richtigkeit der Antworten beim Einsatz mentaler Strategien zeigte sich, dass die Strategie des stellenweisen Rechnens, insbesondere bei Subtraktionsaufgaben, weniger effektiv war als die Strategie des schrittweisen Rechnens (vgl. ebd., S. 306f.). Am Ende des zweiten Schuljahres bestätigten sich die unterschiedlichen Modellierungsfunktionen von Rechenblöcken und Hunderterquadraten als Langzeiteffekte. Diese Ergebnisse unterstreichen die Bedeutung der Strategie des stellenweisen Rechnens und der Strategie des schrittweisen Rechnens als wichtige mentale Rechenstrategien (vgl. ebd., S. 315f.). Des Weiteren wurde in der Kontrollbedingung ohne Materialeinsatz festgestellt, dass das stellenweise Rechnen die häufigste und das schrittweise Rechnen die zweithäufigste dominante Strategie war (vgl. ebd., S. 316).

Eine weitere Studie, die von Klein, Beishuizen und Treffers in den Niederlanden durchgeführt wurde, verglich zwei experimentelle Programme zur mentalen Addition und Subtraktion im zweiten Schuljahr. Das erste Programm ist ein realistisches Programmdesign (RPD), das den flexiblen Einsatz von Lösungsverfahren durch die Verwendung realistischer Kontextprobleme unterstützt (vgl. KLEIN et al., 1998, S. 443). Es wurden Verbindungen zu den informellen Strategien der Schülerinnen und Schüler hergestellt, um den flexiblen Einsatz von Strategien zu fördern. Da die Zahlenmerkmale je nach Problem unterschiedlich sein können, passten die Schülerinnen und Schüler ihre Strategie an die Merkmalen des Problems an. Diese Flexibilität der Strategien ist eine Voraussetzung für das

Lösen eines Merkmalsproblem (vgl. KLEIN et al., 1998, S. 449). Das zweite Programm ist ein graduelles Programmdesign (GPD). Dieses Programm zielt darauf ab, das Wissen schrittweise zu erweitern, indem zunächst der Schwerpunkt auf das prozedurale Rechnen gelegt wird und anschließend flexibles Problemlösen ermöglicht wird. Diese beiden experimentellen Programme wurden im Unterricht mit dem Ziel eingesetzt, eine größere Flexibilität beim Kopfrechnen zu erreichen. Der Unterschied zwischen den beiden Programmen liegt im Unterrichtsdesign, um einen Vergleich zwischen zwei gegensätzlichen Unterrichtskonzepten zu erhalten.
Die Ergebnisse zeigen, dass der leere Zahlenstrahl ein effektives Modell zum Erlernen der Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 ist (vgl. ebd., S. 443). Darüber hinaus unterstützte die Modellierungsfunktion des Zahlenstrahls sowohl die prozeduralen Operationen als auch die Problemdarstellung in beiden Programmen. Im zweiten Schulhalbjahr wurde auch die geistige Aktivität der Schülerinnen und Schüler gefördert (vgl. ebd. S. 461). Eine zusätzliche Analyse führte zu dem Ergebnis, dass die Schülerinnen und Schüler mit dem RPD-Programm verschiedene Funktionen des leeren Zahlenstrahls besser nutzten als die Schülerinnen und Schüler mit dem GPD-Programm (vgl. KLEIN, 1998, S. 168). Die Erfolge des RPD-Programms sprechen für einen zukünftigen Einsatz im Unterricht, und die Versuchsschulen erklärten sich bereit, das RPD-Programm mit dem leeren Zahlenstrahl fortzusetzen (vgl. KLEIN et al., 1998, S. 461f.).

Aktuell liegen keine detaillierten Studien speziell zum Einsatz der App Number Line im Mathematikunterricht der Primarstufe vor. Mögliche Gründe hierfür könnten in der geringen Bekanntheit und Nutzung der App in Grundschulen liegen oder darin, dass der Zugang zur App in den meisten Grundschulen noch erschwert ist.

4. Empirischer Teil

Nachdem der theoretische Teil dieser Arbeit abgeschlossen ist, folgt nun die Vorstellung des empirischen Teils und eine detaillierte Erläuterung des methodischen Vorgehens.

Im folgenden Abschnitt werden die Forschungsfragen und die Hypothesen dieser Untersuchung dargestellt. Anschließend werden das Forschungsdesign und die Konzeption der Aufgaben vorgestellt und die Durchführung der Untersuchung detailliert erläutert.

4.1 Forschungsfragen und Hypothesen

Diese Studie befasst sich mit der Anwendung von Rechenstrategien zur Addition und Subtraktion im Hunderterraum durch Schülerinnen und Schüler der zweiten Klasse. Die einzelnen Rechenwege der Schülerinnen und Schüler werden mit Hilfe der App Number Line an einem Rechenstrich visualisiert. Das Ziel ist es herauszufinden, welche Rechenstrategien die Schülerinnen und Schüler bei Additions- und Subtraktionsaufgaben anwenden und wie sie ihren Rechenweg am Rechenstrich darstellen. Daraus ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- *Forschungsfrage 1: Welche Rechenstrategien wenden die Kinder beim Lösen von Additionsaufgaben im Hunderterraum am Rechenstrich an?*

- *Forschungsfrage 2: Welche Rechenstrategien wenden die Kinder beim Lösen von Subtraktionsaufgaben im Hunderterraum am Rechenstrich an?*

Um die Forschungsfragen näher zu beleuchten, werden zwei Hypothesen aufgestellt, die eine begründete Vermutung darstellen:

- *Hypothese 1: Beim Lösen von Additionsaufgaben im Hunderterraum am Rechenstrich wenden die Kinder verschiedene Rechenstrategien wie schrittweises Rechnen, Hilfsaufgaben und Verdopplungsaufgaben an.*

- *Hypothese 2: Beim Lösen von Subtraktionsaufgaben im Hunderterraum am Rechenstrich wenden die Kinder verschiedene Rechenstrategien wie schrittweises Rechnen, Hilfsaufgaben, Halbierungsaufgaben und Ergänzungsaufgaben an.*

Des Weiteren soll die Häufigkeit der einzelnen Rechenstrategien bei der Addition und Subtraktion im Hunderterraum untersucht werden. Es soll aufgezeigt werden, welche Rechenstrategien bei den verschiedenen Aufgabentypen zur Addition und Subtraktion am häufigsten verwendet werden. Folgende Forschungsfragen werden formuliert:

- *Forschungsfrage 3: Welche Rechenstrategien werden bei der Addition im Hunderterraum am Rechenstrich am häufigsten genutzt?*

- *Forschungsfrage 4: Welche Rechenstrategien werden bei der Subtraktion im Hunderterraum am Rechenstrich am häufigsten genutzt?*

Auch hier werden zu den jeweiligen Forschungsfragen 3 und 4 zwei Hypothesen formuliert, die eine mögliche Antwort aufzeigen:

- *Hypothese 3: Die häufig genutzte Rechenstrategie bei der Addition im Hunderterraum ist das schrittweise Rechnen mit Zehnerergänzung.*

- *Hypothese 4: Die häufig genutzte Rechenstrategie bei der Subtraktion im Hunderterraum ist das schrittweise Rechnen mit Zehnerergänzung.*

Interessant ist auch die Frage, ob die Schülerinnen und Schüler die Rechenstrategien aufgabenspezifisch anwenden oder ob sie eine Hauptstrategie entwickeln und diese unabhängig vom Aufgabentyp einsetzen.

- *Forschungsfrage 5: Verwenden die Kinder die Rechenstrategien aufgabenspezifisch oder haben die Kinder eine Hauptstrategie, die sie unabhängig vom Aufgabentyp einsetzen?*

Während die Forschungsfragen 1 bis 4 die Rechenoperationen Addition und Subtraktion getrennt voneinander betrachten, bezieht sich die Forschungsfrage 5 auf beide Rechenoperationen. Zur genaueren Untersuchung dieser Forschungsfrage wird eine Hypothese aufgestellt.

- *Hypothese 5: Die Kinder entwickeln eine Hauptstrategie, die sie unabhängig vom Aufgabentyp einsetzen.*

Alle aufgestellten Hypothesen stellen eine Annahme dar, die nach der Untersuchung anhand der daraus resultierenden Ergebnisse auf ihre Wahrscheinlichkeit hin überprüft werden.

4.2 Methodisches Vorgehen

Vor Beginn der Durchführung dieser Untersuchung wurde ein Forschungsdesign entwickelt, das die grundlegende Struktur wie den Aufbau und die Planung der Untersuchung beinhaltet und einen Entwurf des Untersuchungsmodells darstellt. Im folgenden Abschnitt werden das Forschungsdesign und die Konzeption der Aufgaben beschrieben.

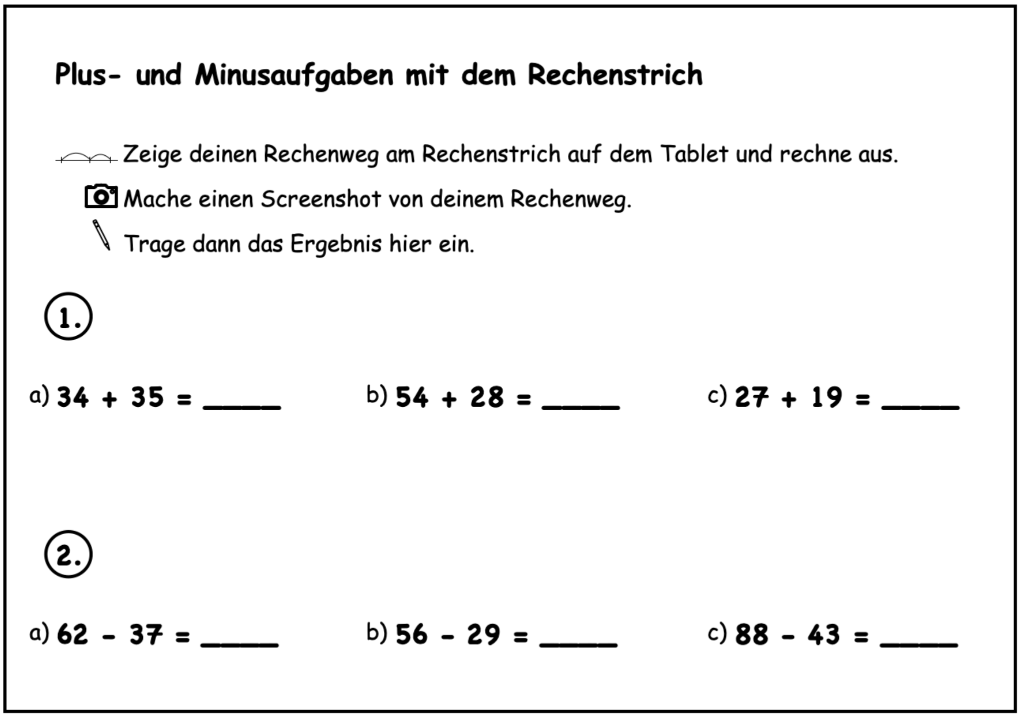
4.2.1 Forschungsdesign

Für die vorliegende Untersuchung wird der Querschnitt als zeitliches Forschungsdesign gewählt, um eine Stichprobe zu einem festen Untersuchungszeitpunkt zu untersuchen (vgl. DÖRING, 2022, S. 212). Diese Studie wird quantitativ durchgeführt und ausgewertet mit dem Ziel, theoretisch abgeleitete Forschungshypothesen zu überprüfen (vgl. ebd., S. 186). Als Messinstrument werden verschiedene Aufgaben zur Addition und Subtraktion eingesetzt.
Die Untersuchung erfolgt anonym, sodass weder Aufzeichnungen noch persönliche Daten der Schülerinnen und Schüler erfasst werden. Die Ergebnisse der

Schülerinnen und Schüler werden in Form von Screenshots festgehalten. Ein Informationsbrief wurde verfasst, um die Erlaubnis bzw. das Einverständnis der Eltern der Schülerinnen und Schüler einzuholen. Der Informationsbrief an die Eltern ist im Anhang beigefügt. Es ist anzumerken, dass in dem Informationsbrief, nach Rücksprache mit der Lehrkraft, der Begriff *Befragung* anstelle von *Untersuchung* verwendet wurde (siehe Anhang). Diese Anpassung dient der besseren Verständlichkeit für die Eltern. Im Anschluss an die Untersuchung werden die Rechenwege näher betrachtet und kategorisch den jeweiligen Rechenstrategien zugeordnet, auf die in Abschnitt 3.2.2 näher eingegangen wird. Die Auswertung der erhobenen Daten erfolgt mit dem statistischen Datenanalyseprogramm IBM SPSS Statistics in der Version 29.0.1.0 (171).

4.2.2 Konzeption der Aufgaben

Die Aufgabe besteht aus insgesamt drei Additionsaufgaben und drei Subtraktionsaufgaben. Diese Aufgaben wurden so konzipiert, dass spezifische Rechenstrategien für den jeweiligen Aufgabentyp zur Addition und Subtraktion geeignet sind und am Rechenstrich veranschaulicht werden können. Sowohl für die Addition als auch für die Subtraktion wurden ähnliche Aufgabentypen ausgewählt, um festzustellen, ob sich die Rechenstrategien zwischen den Rechenoperationen unterscheiden. Dabei handelt es sich um Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang sowie um Aufgaben, bei denen die Zahlen nahe am nächsten Zehner liegen. Die Aufgaben werden den Schülerinnen und Schülern in Form eines Arbeitsblattes ausgehändigt. Auf dem Arbeitsblatt sind die mündlich erklärten Arbeitsanweisungen schriftlich festgehalten, um den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zu geben, die Anweisungen in schriftlicher Form nachzulesen. Die erste Aufgabe besteht aus drei verschiedenen Additionsaufgaben. Die zweite Aufgabe enthält drei verschiedene Subtraktionsaufgaben. Für jede Aufgabe ist ein Linienfeld vorgesehen, in das die Ergebnisse eingetragen werden können. Die Reihenfolge, in der die Aufgaben zu bearbeiten sind, ist durch Nummerierung und Alphabetisierung vorgegeben. Die Additions- und Subtraktionsaufgaben wurden getrennt dargestellt, um eine Verwechslung der Rechenzeichen (Plus oder Minus) zu vermeiden (siehe Abbildung 47).



Plus- und Minusaufgaben mit dem Rechenstrich

Zeige deinen Rechenweg am Rechenstrich auf dem Tablet und rechne aus.

Mache einen Screenshot von deinem Rechenweg.

Trage dann das Ergebnis hier ein.

1.

a) **34 + 35 = _____** b) **54 + 28 = _____** c) **27 + 19 = _____**

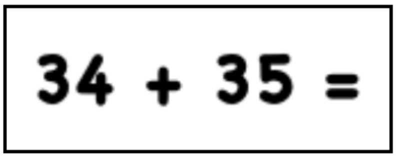
2.

a) **62 - 37 = _____** b) **56 - 29 = _____** c) **88 - 43 = _____**

Abbildung 47: Arbeitsblatt: Plus- und Minusaufgaben mit dem Rechenstrich
Quelle: Eigene Darstellung

Im Folgenden werden die verschiedenen Aufgabentypen zur Addition und Subtraktion sowie geeignete Rechenstrategien am Rechenstrich vorgestellt und näher erläutert.

Für die Addition wurden die folgenden Aufgaben ausgewählt:



34 + 35 =

Abbildung 48: Additionsaufgabe ohne Zehnerübergang
Quelle: Eigene Darstellung

Die erste Aufgabe in Abbildung 48 lautet: 34 + 35. Es handelt sich um eine Additionsaufgabe ohne Übergang im Zehnerbereich. Hier kann das *schrittweise Rechnen* als mögliche Strategie eingesetzt werden. Bei dieser Strategie wird die Aufgabe schrittweise gelöst, indem die Zehner und die Einer des zweiten Summanden getrennt behandelt werden. Eine weitere Möglichkeit ist das *Verdoppeln*. Beim *Verdoppeln* kann die Aufgabe einfacher gelöst werden, indem der erste Summand verdoppelt und dann miteinander addiert wird. Es ist wichtig zu beachten, dass der fehlende Wert, der noch nicht addiert wurde, hinzugefügt wird.

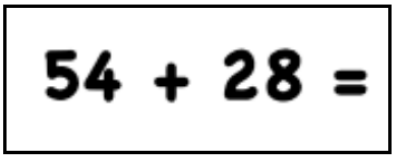


Abbildung 49: Additionsaufgabe mit Zehnerübergang
Quelle: Eigene Darstellung

Die zweite Aufgabe ist eine Addition mit Zehnerübergang (siehe Abbildung 49). Die Aufgabe 54 + 28 kann mit der Strategie des *schrittweisen Rechnens* gelöst werden. Durch das Zerlegen der Stellenwerte des zweiten Summanden können einzelne Teilschritte bearbeitet werden. Da der zweite Summand in der Nähe des nächsten Zehners liegt, kann auch die *Hilfsaufgabe (Vor-Zurück)* eingesetzt werden. Zuerst wird auf den nächsten Zehner aufgerundet und dann der aufgerundete Wert wieder abgezogen.

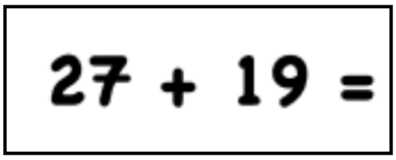


Abbildung 50: Additionsaufgabe mit Zehnerübergang und Zehnernähe
Quelle: Eigene Darstellung

Die dritte Aufgabe in Abbildung 50 ist eine Addition mit Zehnerübergang und Zehnernähe. Eine mögliche Strategie ist das *schrittweise Rechnen*. Die Aufgabe 27 + 19 kann einfacher gelöst werden, indem der zweite Summand stellengerecht in einzelne Teilschritte zerlegt wird. Eine besondere Strategie, die bei dieser Aufgabe angewendet werden kann, ist die *Hilfsaufgabe (Vor-Zurück)*. Der zweite Summand kann auf den nächsten Zehner aufgerundet werden und dann wird der aufgerundete Wert wieder abgezogen.

Für die Subtraktion wurden ähnliche Aufgabentypen wie bei der Addition ausgewählt, die im Folgenden erläutert werden:

Die erste Subtraktionsaufgabe beinhaltet einen Übergang im Zehnerbereich (siehe Abbildung 51). Um diese Aufgabe 62 - 37 leichter lösen zu können, kann in einzelnen Teilrechnungen gearbeitet werden. Dies ermöglicht die Strategie des *schrittweisen Rechnens*. Diese Strategie eignet sich besonders gut für Aufgaben mit Zehnerübergang, da die Teilrechnungen schrittweise durchgeführt werden können.

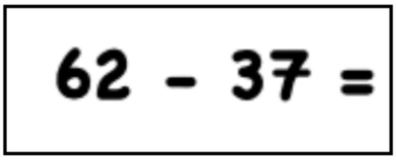


Abbildung 51: Subtraktionsaufgabe mit Zehnerübergang
Quelle: Eigene Darstellung

Die zweite Subtraktionsaufgabe enthält einen Zehnerübergang und eine Zehnerannäherung (siehe Abbildung 52). Für die Aufgabe 56 - 29 kann das *schrittweise Rechnen* als geeignete Strategie eingesetzt werden. Diese Strategie ermöglicht nach der Stellenzerlegung des Subtrahenden einzelne Teilaufgaben, die schrittweise bearbeitet werden können. Eine weitere spezielle Strategie für diese Aufgabe ist die *Hilfsaufgabe (Zurück-Vor)*. Dabei wird der Subtrahend, der nahe am nächsten Zehner liegt, aufgerundet. Anschließend wird der zu viel subtrahierte Wert wieder addiert.

56 - 29 =

Abbildung 52: Subtraktionsaufgabe mit Zehnerübergang und Zehnernähe
Quelle: Eigene Darstellung

88 - 43 =

Abbildung 53: Subtraktionsaufgabe ohne Zehnerübergang
Quelle: Eigene Darstellung

Die dritte Aufgabe in Abbildung 53 lautet 88 - 43 und ist eine Subtraktionsaufgabe ohne Zehnerübergang. Die Aufgabe 88 - 43 kann geschickt mit der Strategie des *schrittweisen Rechnens* geschickt gelöst werden. Bei dieser Strategie wird der Subtrahend stellenweise zerlegt und einzeln subtrahiert. Alternativ kann für diese Aufgabe eine *Halbierungsaufgabe* eingesetzt werden. Dabei wird der Minuend halbiert und die Hälfte wird vom ganzen Minuenden subtrahiert. Anschließend wird der zu viel abgezogene Wert wieder addiert.

4.2.3 Durchführung der Untersuchung

Insgesamt nahmen 33 Schülerinnen und Schüler der zweiten Klasse an der Untersuchung teil. Für die Durchführung wurden zwei Grundschulen aus verschieden Landkreisen ausgewählt. Die erste Untersuchung fand in einer zweiten Klasse mit 22 Schülerinnen und Schüler an der Grundschule 1 aus dem Landkreis Heidenheim statt. Die zweite Untersuchung wurde in einer zweiten Klasse mit 11 Schülerinnen und Schülern an der Grundschule 2 aus dem Landkreis Ulm durchgeführt. Als Untersuchungszeitraum wurde Mitte/Ende Mai vor den Pfingstferien festgelegt. Die geplante Dauer der Datenerhebung betrug 45 Minuten, wobei die tatsächliche Zeit während der Untersuchung variierte. Die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler benötigten weniger Zeit, während die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler mehr Zeit benötigten.

Für jeden Untersuchungsdurchgang wurden drei Schülerinnen und Schüler zu einer Kleingruppe zusammengefasst. Dadurch konnte die Untersuchungsleiterin besser auf die individuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler eingehen und bei Bedarf Hilfestellung geben. Die Unterstützung bestand zum Beispiel darin, den Schülerinnen und Schülern zu zeigen, wie sie ihre Rechenwege am Rechenstrich darstellen können oder ihnen bei technischen Problemen zu helfen. Bei Schwierigkeiten wurden gezielte Fragen gestellt, um den Schülerinnen und Schülern Impulse zu geben und sie auf mögliche Strategien am Rechenstrich hinzuweisen.

Zur Bearbeitung der Aufgaben erhielten die Schülerinnen und Schüler ein Arbeitsblatt sowie ein Tablet, auf dem die App *Number Line* installiert war. Mit dieser App lösten die Schülerinnen und Schüler verschiedene Additions- und Subtraktionsaufgaben am Rechenstrich. Vor dem Einsatz der App erhielten sie eine kurze Einführung und ausreichend Zeit zum Ausprobieren. So konnten sich die Schülerinnen und Schüler mit den Funktionen vertraut machen und den Umgang mit der App erlernen. Dies steigerte die intrinsische Motivation der Schülerinnen und Schüler. Nach der Bearbeitung einer Aufgabe wurde das Ergebnis per Screenshot festgehalten und in das Arbeitsblatt eingetragen. Das Arbeitsblatt diente zur Orientierung, zur Darstellung der Aufgaben und zur Dokumentation der Ergebnisse. Die Aufgaben wurden von den Schülerinnen und Schülern in Einzelarbeit bearbeitet.

4.3 Ergebnisse und deren Interpretation

Die folgenden Ergebnisse dieser Untersuchung wurden mit Hilfe des statistischen Datenanalyseprogramms IBM SPSS Statistics in der Version 29.0.1.0 (171) ausgewertet und dargestellt. Die erhobenen Daten werden anhand von Balken- und Säulendiagramme visualisiert und mit den entsprechenden Forschungsfragen und Hypothesen analysiert. Die Wahl dieser Darstellungsformen basiert auf ihrer Fähigkeit, die Ergebnisse klar und übersichtlich darzustellen und Vergleiche zu ermöglichen. Das Balkendiagramm wurde speziell gewählt, um die langen Beschriftungen der einzelnen Merkmalsausprägungen durch eine horizontale Anordnung der Säulen besser zu veranschaulichen.

Im Folgenden werden die einzelnen Forschungsfragen anhand der Auswertung der Ergebnisse bearbeitet und die entsprechenden Hypothesen überprüft. Zunächst wird dargestellt, welche Rechenstrategien die Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben anwenden. Anschließend wird die Häufigkeit der einzelnen Strategien bei der Addition und Subtraktion veranschaulicht. Die einzelnen Additions- und Subtraktionsaufgaben werden jeweils zusammengefasst, um einen besseren Überblick über die Rechenoperationen zu erhalten. Darüber hinaus wird untersucht, ob die Schülerinnen und Schüler eine Hauptstrategie entwickeln oder ob sie flexibel verschiedene Strategien zur Bearbeitung der Aufgaben einsetzen. Abschließend werden die Ergebnisse der beiden Schulen getrennt betrachtet und miteinander verglichen.

Forschungsfrage 1: Welche Rechenstrategien wenden die Kinder beim Lösen von Additionsaufgaben im Hunderterraum am Rechenstrich an?

Hypothese 1: Beim Lösen von Additionsaufgaben im Hunderterraum am Rechenstrich wenden die Kinder verschiedene Rechenstrategien wie schrittweises Rechnen, Hilfsaufgaben und Verdopplungsaufgaben an.

Bei der Nutzung der App Number Line zur Addition im Hunderterraum wurden verschiedene Rechenstrategien beobachtet. Zu den ausgewählten Strategien gehören das *schrittweise Rechnen* in verschiedenen Varianten, die *Hilfsaufgabe (Vor-Zurück)* sowie die *Verdopplungsaufgabe* (siehe Abbildung 54 bis 57). Damit kann die Hypothese 1 bestätigt werden.

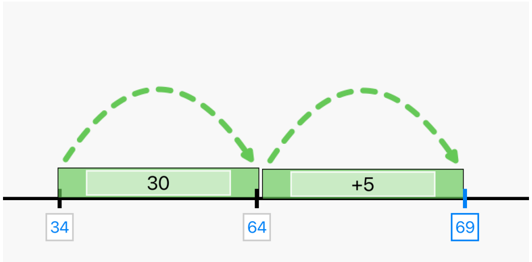


Abbildung 54: Schrittweises Rechnen (1. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

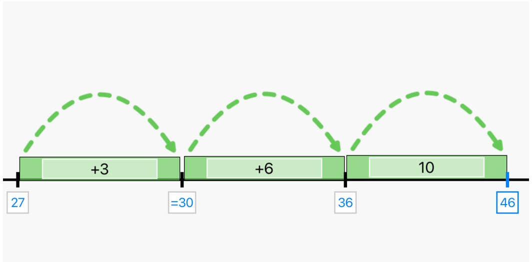


Abbildung 55: Schrittweises Rechnen (Zehnerergänzung, 2. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

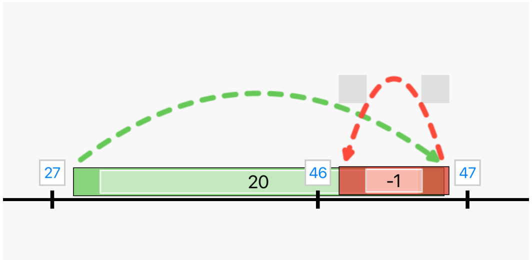


Abbildung 56: Hilfsaufgabe (Vor-Zurück)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

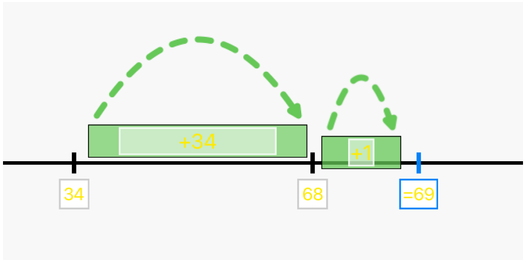


Abbildung 57: Verdopplungsaufgabe
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Forschungsfrage 2: Welche Rechenstrategien wenden die Kinder beim Lösen von Subtraktionsaufgaben im Hunderterraum am Rechenstrich an?

Hypothese 2: Beim Lösen von Subtraktionsaufgaben im Hunderterraum am Rechenstrich wenden die Kinder verschiedene Rechenstrategien wie schrittweises Rechnen, Hilfsaufgaben, Halbierungsaufgaben und Ergänzungsaufgaben an.

Auch bei der Subtraktion im Hunderterraum wurden verschiedene Rechenstrategien am Rechenstrich mit Hilfe der App notiert. Dabei wurden die Strategien wie das *schrittweise Rechnen* in verschiedenen Formen, die *Hilfsaufgabe (Zurück-Vor)* und die *Halbierungsaufgabe* verwendet (siehe Abbildung 58 bis 61).

Bei der Überprüfung der Hypothese 2 zeigt sich, dass die am häufigsten genannten Strategien auch beim Rechenstrich eingesetzt wurden. Die einzige Strategie, die bei der Lösung von Subtraktionsaufgaben nicht gewählt wurde, ist die *Ergänzungsaufgabe*.

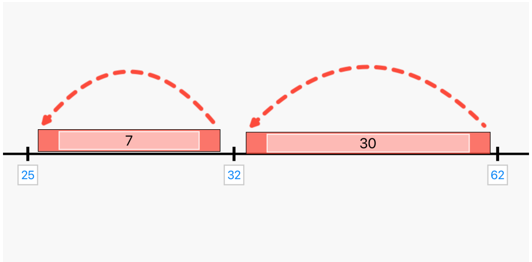


Abbildung 58: Schrittweises Rechnen (1. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

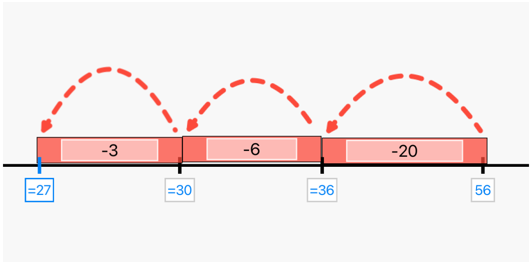


Abbildung 59: Schrittweises Rechnen (Zehnerergänzung, 2. Form)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

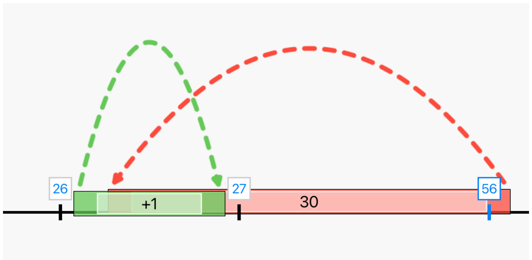


Abbildung 60: Hilfsaufgabe (Zurück-Vor)
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

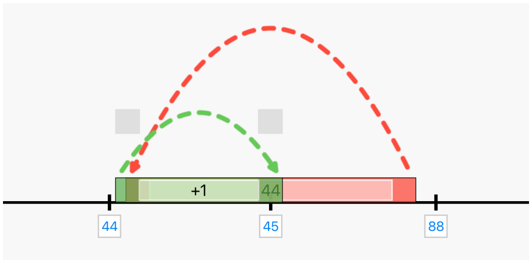


Abbildung 61: Halbierungsaufgabe
Quelle: Screenshot der App Number Line (The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Forschungsfrage 3: Welche Rechenstrategien werden bei der Addition im Hunderterraum am Rechenstrich am häufigsten genutzt?

Hypothese 3: Die häufig genutzte Rechenstrategie bei der Addition im Hunderterraum ist das schrittweise Rechnen mit Zehnerergänzung.

Im Hinblick auf die Häufigkeit der Anwendung von Rechenstrategien bei der Addition im Hunderterraum wurden mit Hilfe der App *Number Line* verschiedene Strategien am Rechenstrich abgebildet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 62 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Häufigkeit der einzelnen Strategien nicht gleichmäßig verteilt ist. Die häufigste Strategie am Rechenstrich ist das *schrittweise Rechnen in der Form (Z, E)* mit einem Anteil von 69,7%. Das *schrittweise Rechnen in der Form (E, Z)* hat dagegen einen deutlich geringeren Anteil von 19,2%. Zwei weitere Formen der Strategie *schrittweises Rechnen mit Zehnerergänzung* hatten jeweils einen Anteil von 3,0%. Die *Hilfsaufgabe (Vor-Zurück)* wurde von 4,0% der Schülerinnen und Schüler verwendet. Die am wenigsten genutzte Rechenstrategie war die *Verdopplungsaufgabe* mit einem Anteil von 1,0%.

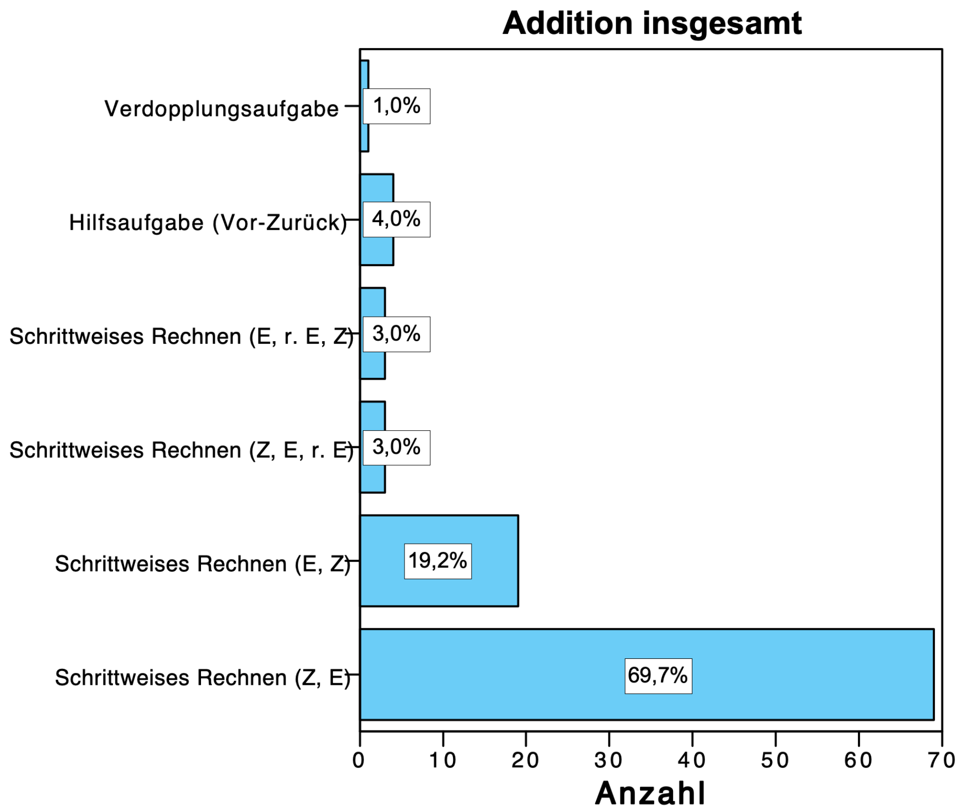


Abbildung 62: Addition insgesamt
Quelle: IBM Deutschland GmbH (o. D., o. S.)

Basierend auf den Ergebnissen kann die Hypothese 3 nicht bestätigt werden. Die meisten Schülerinnen und Schüler hatten kaum Schwierigkeiten beim Übergang zur nächsten Zehnerzahl, sodass eine Zehnerergänzung nicht notwendig war. Beim Lösen von Additionsaufgaben wurde am häufigsten die Strategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (Z, E)* verwendet. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass zunächst die Zehner und dann die Einer des zweiten Summanden betrachtet und getrennt voneinander schrittweise berechnet wurden. Außerdem kann angenommen werden, dass die erste Berechnung der Zehner einfacher erscheint, als die erste Berechnung der Einer. Es kann auch vermutet werden, dass die Verwendung der Strategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (Z, E)* als bevorzugte Strategie im Mathematikunterricht angesehen werden kann.

Forschungsfrage 4: Welche Rechenstrategien werden bei der Subtraktion im Hunderterraum am Rechenstrich am häufigsten genutzt?

Hypothese 4: Die häufig genutzte Rechenstrategie bei der Subtraktion im Hunderterraum ist das schrittweise Rechnen mit Zehnerergänzung.

Die Subtraktionsaufgaben im Hunderterraum wurden mit unterschiedlichen Rechenstrategien am Rechenstrich gelöst. Die Abbildung 63 zeigt die Ergebnisse dargestellt, die bei der Subtraktion am Rechenstrich erzielt wurden. Bemerkenswert ist, dass diese Ergebnisse Ähnlichkeiten mit den Additionsergebnissen aufweisen. Die Strategie des *schrittweisen Rechnens* zeigt in verschiedenen Formen ein dominantes Muster auf. Die am häufigsten verwendete Form des *schrittweisen Rechnens ist die Form (Z, E)* mit einem deutlich hohen Anteil von 66,7%, während *die Form (E, Z)* mit 13,1% weniger häufig verwendet wurde. Zwei Formen des *schrittweisen Rechnens mit Zehnerergänzung* hatten jeweils einen geringeren Anteil von 6,1%. Bei den Subtraktionsergebnissen fällt auf, dass eine weitere Form des *schrittweisen Rechnens mit Zehnerergänzung* angewandt wurde, die bei der Addition nicht vorkam. Diese Strategie hatte einen geringen Anteil von 2,0%. Eine weitere verwendete Strategie war die *Hilfsaufgabe (Zurück-Vor)* mit einem Anteil von 4,0%.

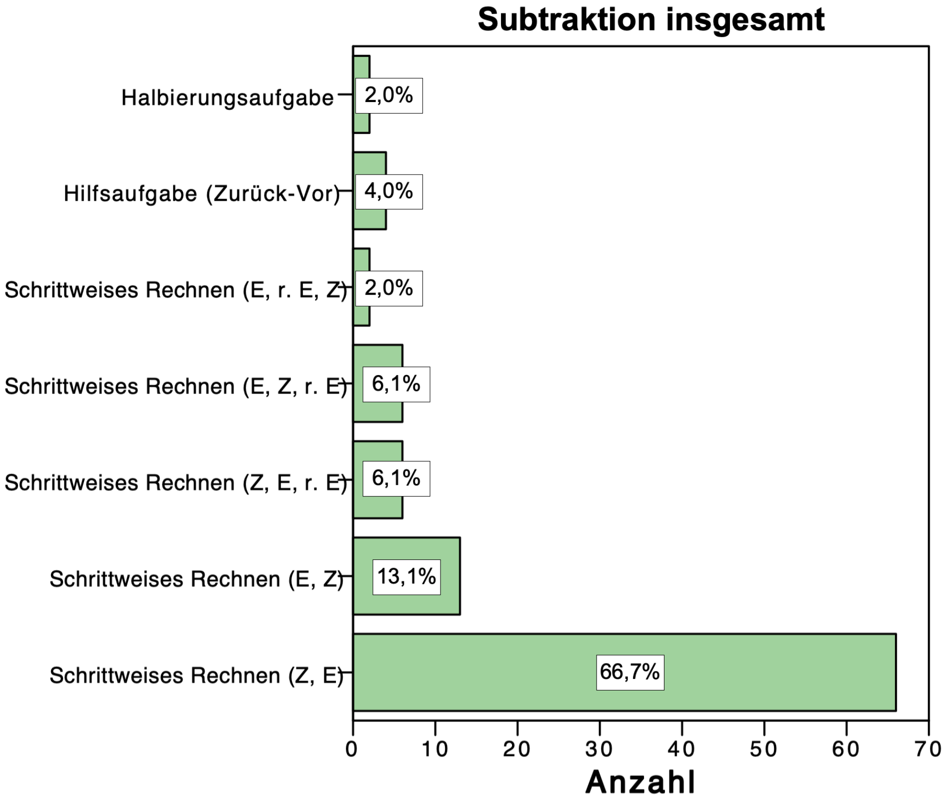


Abbildung 63: Subtraktion insgesamt
Quelle: IBM Deutschland GmbH (o. D., o. S.)

Am geringsten ist der Anteil bei der Verwendung der *Halbierungsaufgabe* mit 2,0%. Somit kann die Hypothese 4 nicht bestätigt werden, da die Strategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (Z, E) ohne Zehnerergänzung* überwiegend genutzt wurde. Ähnlich wie bei der Addition lässt sich annehmen, dass die Schülerinnen und Schüler die Subtraktionsaufgaben mit Zehnerübergang problemlos bewältigten, weshalb auf eine Zehnerergänzung verzichtet wurde. Zudem wurden nach der Stellenzerlegung des Subtrahenden zuerst die Zehner und dann die Einer berechnet, um die Aufgabenlösung zu erleichtern. In diesem Zusammenhang ist auch anzunehmen, dass die Strategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (Z, E)* im Mathematikunterricht am häufigsten angewandt wurde. Ein Unterschied zur Addition besteht in der häufigeren Nutzung der Strategie des schrittweisen Rechnens mit Zehnerergänzung. Diese Strategie wurde bei der Subtraktion häufiger eingesetzt als bei der Addition. Vermutlich fällt den Schülerinnen und Schülern der Zehnerübergang beim Rückwärtsrechnen weniger leicht als beim Vorwärtsrechnen.

Forschungsfrage 5: Verwenden die Kinder die Rechenstrategien aufgabenspezifisch oder haben die Kinder eine Hauptstrategie, die sie unabhängig vom Aufgabentyp einsetzen?

Hypothese 5: Die Kinder entwickeln eine Hauptstrategie, die sie unabhängig vom Aufgabentyp einsetzen.

Bei der Anwendung von Rechenstrategien am Rechenstrich mit der App *Number Line* konnte festgestellt werden, ob die Schülerinnen und Schüler eine Hauptstrategie entwickeln oder unabhängig vom Aufgabentyp verschiedene Strategien anwenden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 64 in Form eines Säulendiagramms dargestellt. Ein Säulendiagramm eignet sich besonders gut, um wenige Ausprägungen darzustellen und miteinander zu vergleichen. Es ist zu erkennen, dass es einen minimalen Unterschied zwischen dem Einsatz der Hauptstrategie und dem Nicht-Einsatz der Hauptstrategie gibt. Insgesamt haben 18 Schülerinnen und Schüler bei allen Aufgaben eine Hauptstrategie genutzt, während 15 Schülerinnen und Schüler keine Hauptstrategie entwickelt haben und eine Flexibilität beim Einsatz von Rechenstrategien zeigen.

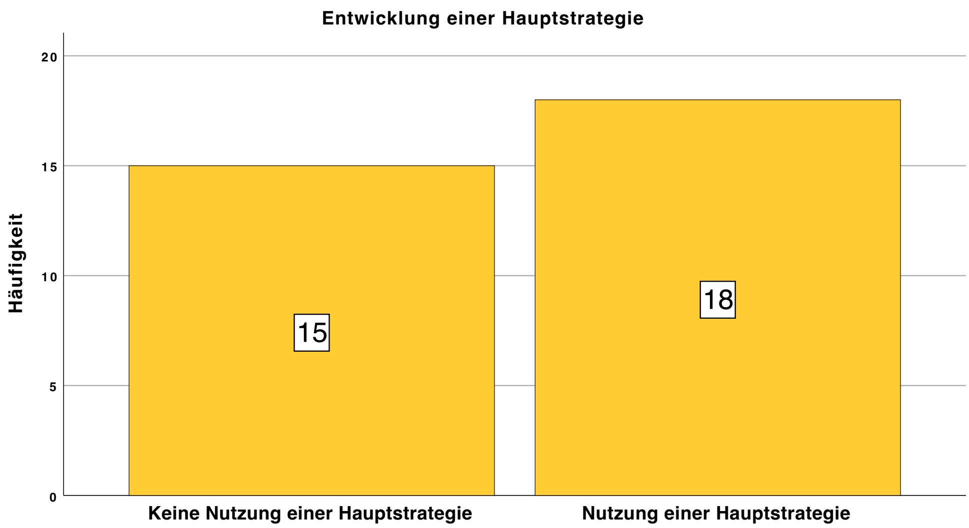


Abbildung 64: Entwicklung einer Hauptstrategie
Quelle: IBM DEUTSCHLAND GMBH (o. D., o. S.)

Die gewählte Hauptstrategie ist in der folgenden Abbildung 65 dargestellt. Es zeigt sich, dass die Strategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (Z, E)* am häufigsten als Hauptstrategie verwendet wurde. Von den 18 Schülerinnen und Schülern, die eine Hauptstrategie entwickelten, wählten 17 diese Strategie als ihre Hauptstrategie. Eine andere Form des *schrittweisen Rechnens (E, Z)* wurde nur von einem Schüler oder einer Schülerin verwendet. Hier wird deutlich, dass die Strategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (Z, E)* sowohl bei der Anwendung der Rechenstrategien am Rechenstrich als auch bei der Wahl einer Hauptstrategie dominierte.

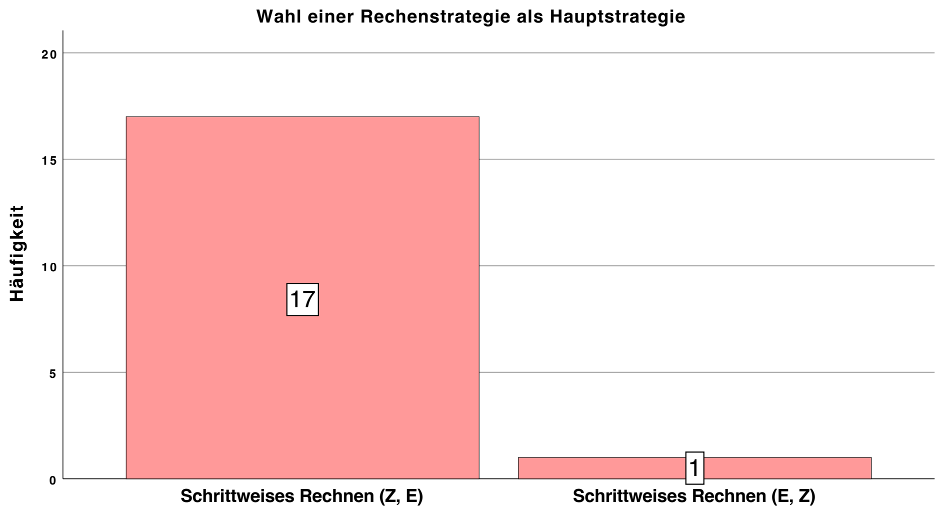


Abbildung 65: Wahl einer Rechenstrategie als Hauptstrategie
Quelle: IBM DEUTSCHLAND GMBH (o. D., o. S.)

Die zugehörige Hypothese 5 kann verifiziert werden, da die Nutzung der Hauptstrategie am häufigsten auftritt. Es ist davon auszugehen, dass bei der Anwendung der Rechenstrategien am Rechenstrich eine bereits bekannte oder bevorzugte Strategie ausgewählt und diese unabhängig vom Aufgabentyp weiter angewandt wurde.

Um den Vergleich zwischen den beiden Schulen in Bezug auf die Anwendung der einzelnen Rechenstrategien genauer zu untersuchen, werden in den folgenden Abbildungen 66 bis 69 die Ergebnisse der beiden Schulen dargestellt. Es fällt auf, dass die Ergebnisse der beiden Schulen ein ähnliches Muster aufweisen. In der Grundschule 1 wurde sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion die Rechenstrategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (Z, E)* am Rechenstrich angewandt. Bei der Subtraktion wurden die Formen des *schrittweisen Rechnens mit Zehnerergänzung* häufiger genutzt als bei der Addition. Auch in der Grundschule 2 wird die Strategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (Z, E)* bei allen Aufgaben am häufigsten angewandt. Ähnlich wie in der Grundschule 1 wurden die Formen der Strategie des *schrittweisen Rechnens mit Zehnerergänzung* bei Subtraktionsaufgaben häufiger angewandt als bei Additionsaufgaben. Die Strategien *Hilfsaufgabe (Vor-Zurück)*, *Hilfsaufgabe (Zurück-Vor)* und *Halbierungsaufgabe* wurden in beiden Schulen ähnlich häufig verwendet. In der Grundschule 1 wurde zusätzlich zu den bereits genannten Strategien auch die Strategie *Verdopplungsaufgabe* bei der Addition eingesetzt. Zusammenfassend ist festzuhalten, dass es keine signifikanten Unterschiede zwischen den Schulen gibt, da ähnliche Rechenstrategien am Rechenstrich verwendet wurden.

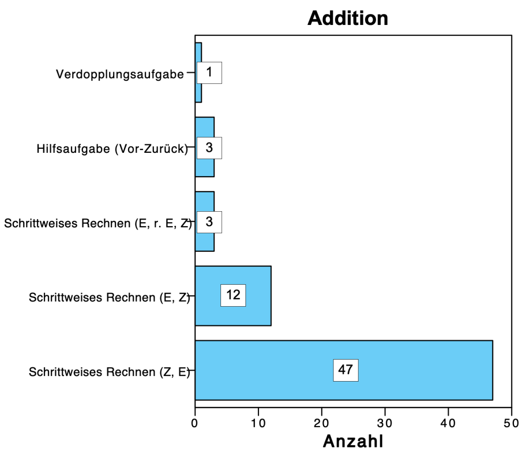


Abbildung 66: Addition in Grundschule 1
Quelle: IBM DEUTSCHLAND GMBH (o. D., o. S.)

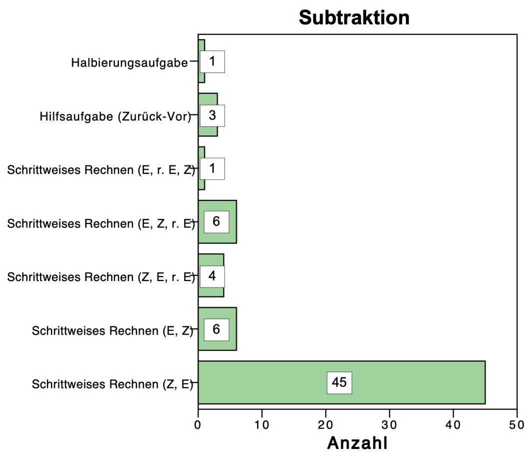


Abbildung 67: Subtraktion in Grundschule 1
Quelle: IBM DEUTSCHLAND GMBH (o. D., o. S.)

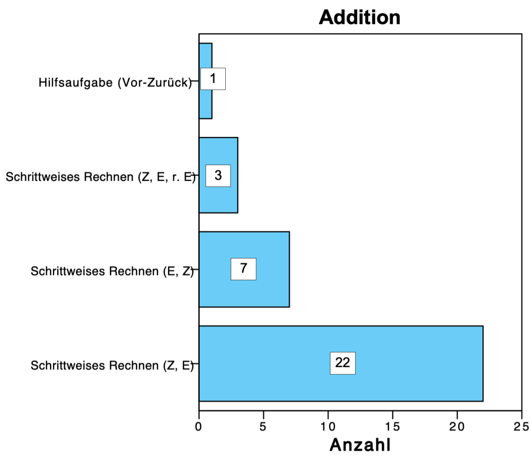


Abbildung 68: Addition in Grundschule 2
Quelle: IBM DEUTSCHLAND GMBH. (o. D., o. S.)

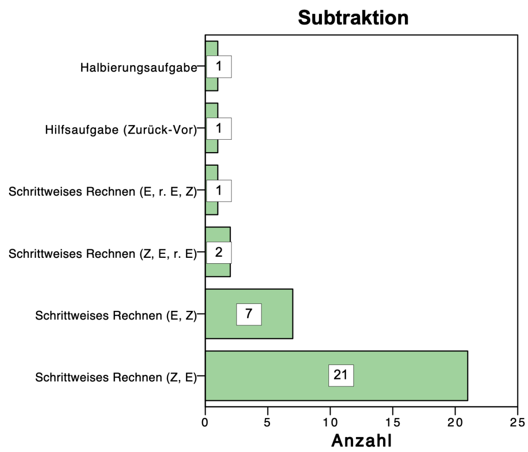


Abbildung 69: Subtraktion in Grundschule 2
Quelle: IBM DEUTSCHLAND GMBH (o. D., o. S.

Auch bei der Entwicklung einer Hauptstrategie gibt es Ähnlichkeiten zwischen den beiden Schulen. Die Ergebnisse der beiden Schulen zeigen einen geringen Unterschied zwischen der Nutzung einer Hauptstrategie und der Nicht-Nutzung einer Hauptstrategie. In der Grundschule 1 haben 12 Schülerinnen und Schüler eine Hauptstrategie entwickelt, während 10 Schülerinnen und Schüler verschiedene Rechenstrategien eingesetzt haben (siehe Abbildung 70).

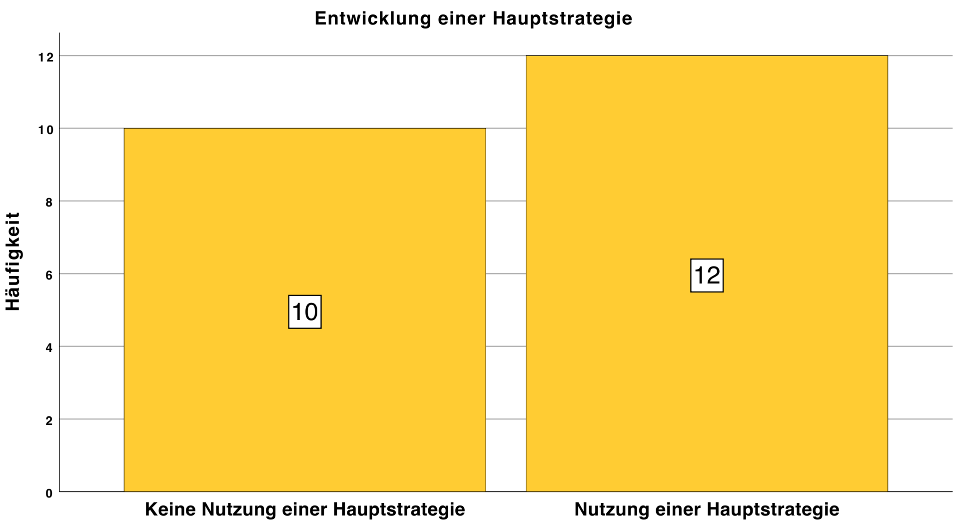


Abbildung 70: Entwicklung einer Hauptstrategie in Grundschule 1
Quelle: IBM DEUTSCHLAND GMBH (o. D., o. S.)

Die Grundschule 2 zeigt ähnliche Ergebnisse wie die Grundschule 1. Von den 11 Schülerinnen und Schülern haben 6 eine Hauptstrategie genutzt und 5 weisen weisen eine Flexibilität beim Einsatz von Rechenstrategien auf (siehe Abbildung 71).

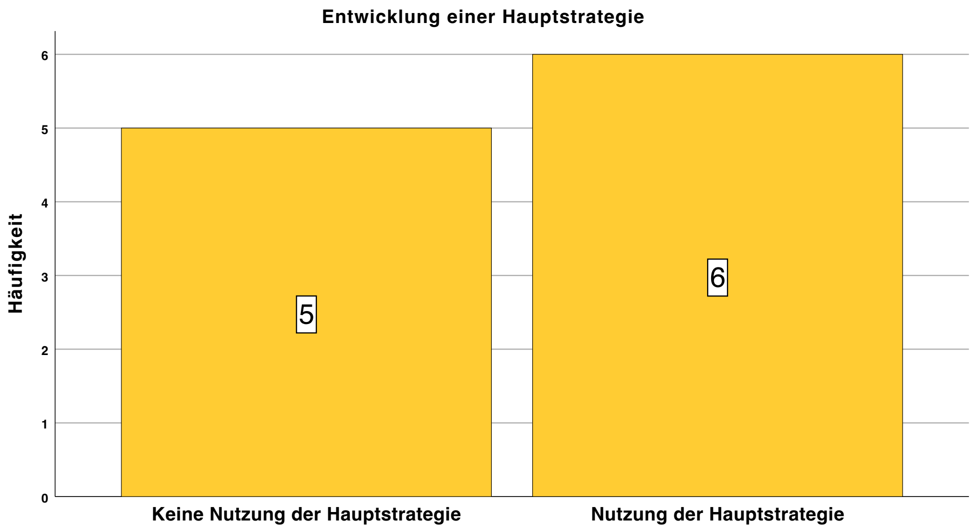


Abbildung 71: Entwicklung einer Hauptstrategie in Grundschule 2
Quelle: IBM DEUTSCHLAND GMBH (o. D., o. S.)

Die Häufigkeit bei der Wahl einer Rechenstrategie als Hauptstrategie ist eindeutig. In der Grundschule 1 wurde nur die Strategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (Z, E)* als Hauptstrategie verwendet (siehe Abbildung 72).

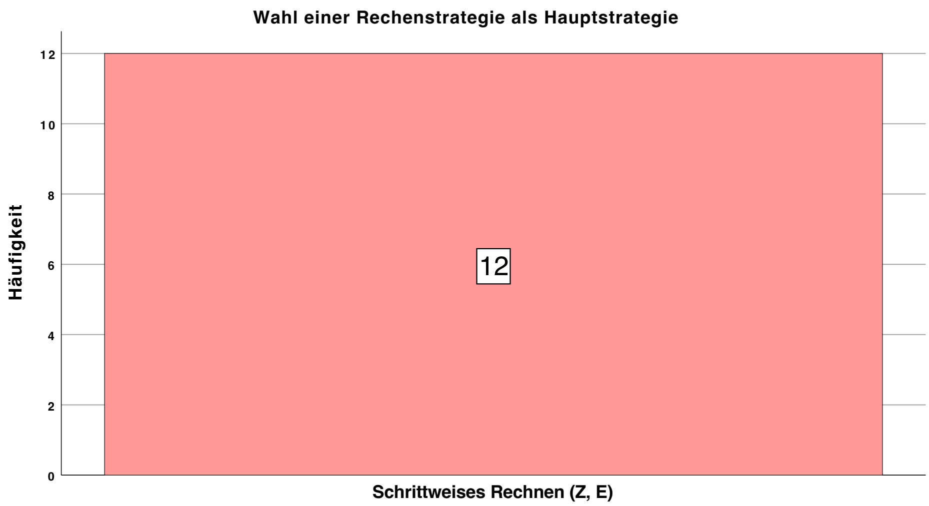


Abbildung 72: Wahl einer Rechenstrategie als Hauptstrategie in Grundschule 1
Quelle: IBM DEUTSCHLAND GMBH (o. D., o. S.)

Hinsichtlich der Wahl einer Rechenstrategie als Hauptstrategie zeigt sich in der Grundschule 2 ein ähnliches Bild wie in der Grundschule 1. Es wurde überwiegend die Strategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (Z, E)* eingesetzt und nur einmal wurde die Strategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (E, Z)* als Hauptstrategie gewählt (siehe Abbildung 73).

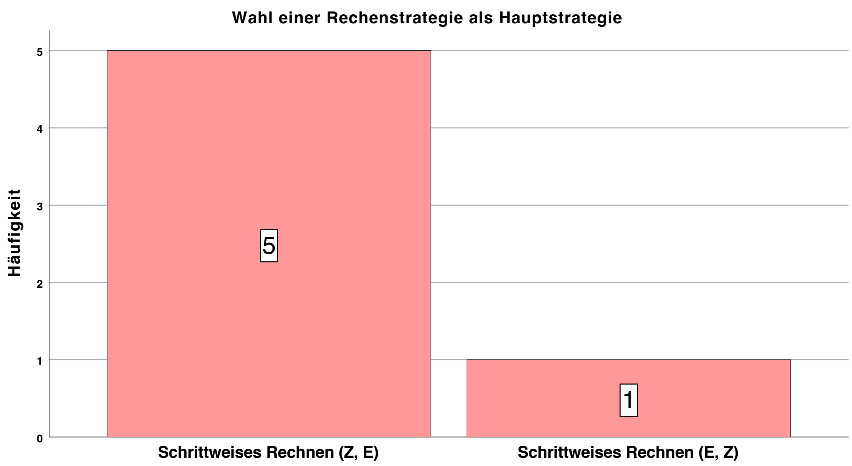


Abbildung 73: Wahl einer Rechenstrategien als Hauptstrategie in Grundschule 2
Quelle: IBM DEUTSCHLAND GMBH (o. D., o. S.)

4.4 Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse zum Einsatz von Rechenstrategien am Rechenstrich mit Hilfe der App *Number Line* zeigen, dass Ähnlichkeiten zu anderen bisherigen Studien Ähnlichkeiten bestehen.

Benz untersuchte in ihrer Studie die Rechenstrategien der Schülerinnen und Schüler zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 (vgl. BENZ, 2005, S. 99f., S. 194). Die Untersuchung erstreckte sich über das gesamte zweite Schuljahr, um die Entwicklung der Rechenstrategien zu analysieren. Während der Untersuchung wurden die Ergebnisse mittels klinischer Interviews erhoben (vgl. ebd., S. 1). Es zeigte sich, dass die Strategie des *schrittweisen Rechnens* und die *Mischform* im Laufe des Schuljahres einen kontinuierlichen Anstieg aufwiesen. Im Gegensatz dazu nahmen die Strategie des *stellenweisen Rechnens* und das *Ableiten* bis zur Mitte des Schuljahres zu und dann bis zum Ende des Schuljahres wieder ab (vgl. ebd., S. 194f.). Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass das *schrittweise Rechnen* im Verlauf des zweiten Schuljahres dominiert und als eine der am häufigsten verwendeten Strategien angesehen werden kann.

In dieser vorliegenden Untersuchung konnten ähnliche Ergebnisse hinsichtlich der Verwendung der Strategie des *schrittweisen Rechnens* erzielt werden. Das *schrittweise Rechnen* wurde als eine der am häufigsten genutzten Strategien bei allen Aufgaben zur Addition und Subtraktion am Rechenstrich mit der App *Number Line* identifiziert. Während Benz in ihrer Studie eine häufige Nutzung der Strategie *Ableiten* feststellte, zeigt die Untersuchung in dieser Arbeit eine geringe Nutzung dieser Strategie (vgl. ebd., S. 317). Eine Untersuchung des *stellenweisen Rechnens* konnte im Rahmen dieser Studie nicht durchgeführt werden, da es für die Notation am Rechenstrich nicht geeignet ist.

Die stetige Zunahme der Strategie des *schrittweisen Rechnens* kann auf die ausführliche Darstellung sowie die Favorisierung dieser Strategie in vielen Schulbüchern wie Multi, Welt der Zahl, Nussknacker oder Mathematikus zurückgeführt werden (vgl. ebd., S. 194).

Des Weiteren wurde in der Studie von Benz festgestellt, dass die Strategie des *schrittweisen Rechnens* bei Subtraktionsaufgaben mit Zehnerübergang häufiger verwendet wurde als bei Subtraktionsaufgaben ohne Zehnerübergang. Diese Strategie entwickelte sich zur Hauptstrategie bei den Subtraktionsaufgaben mit Zehnerübergang (vgl. BENZ, 2005, S. 318). Ähnliche Ergebnisse konnten auch in der vorliegenden Studie beobachtet werden. Das *schrittweise Rechnen mit Zehnerergänzung* wurde bei Subtraktionsaufgaben häufiger eingesetzt als bei Additionsaufgaben.

Benz stellte innerhalb einer Untersuchung eine Präferenz für die Verwendung einer Strategie fest. Die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler bevorzugte eine bestimmte Rechenstrategie (vgl. ebd., S. 220). In der vorliegenden Studie zeigt sich, dass in den meisten Fällen die Strategie des *schrittweisen Rechnens* bei allen Aufgabentypen zur Addition und Subtraktion vorwiegend eingesetzt wurde und sich zur Hauptstrategie entwickelte. Dennoch konnte sowohl in der Studie von Benz als auch in der Untersuchung dieser Arbeit eine Vielfalt an Rechenstrategien bei den Additions- und Subtraktionsaufgaben festgestellt werden. Nach Benz ist es wichtig, dass „ […] wenn man sich dafür entscheidet eine Strategie zu favorisieren, sollte man keine Rechenstrategie ausklammern, sondern im Unterricht auf alle Strategien eingehen, da die Kinder alle Rechenstrategien nutzen“ (ebd., S. 317).

Beishuizen untersuchte in einer Feldstudie die mentalen Strategien von Zweitklässlern bei der Addition und Subtraktion im Hunderterraum. Der Einsatz der Strategien wurde unter Verwendung von Materialien analysiert (vgl. BEISHUIZEN, 1993, S. 294, S. 303). Er fand heraus, dass beim Lösen von Aufgaben zur Addition und Subtraktion mit Hilfe von Rechenblöcken die Strategie des *stellenweisen Rechnens* genutzt wurde. Bei der Verwendung von Hunderterquadrate wurde hingegen die Strategie des *schrittweisen Rechnens* eingesetzt. Beim Einsatz ohne Materialien zeigte sich eine dominante Häufigkeit der Strategie des *stellenweisen Rechnens* (vgl. ebd., S. 306f.). In der vorliegenden Untersuchung konnte die häufigste Verwendung des *schrittweisen Rechnens* durch die Verwendung des Rechenstrichs beobachtet werden. Auch in der Untersuchung

von Beishuizen zeigte sich, dass ohne die Verwendung von Materialien das *stellenweise Rechnen* am häufigsten und das *schrittweise Rechnen* am zweithäufigsten verwendet wurde (vgl. ebd., S. 316).
In der vorliegenden Untersuchung mit der App *Number Line* zeigte sich bei allen Aufgaben eine Dominanz der Strategie des *schrittweisen Rechnens*. Das *stellenweise Rechnen* konnte in dieser Untersuchung aufgrund des Rechenstrichs nicht durchgeführt werden, daher liegen zu dieser Strategie keine Ergebnisse vor.

In Bezug auf die Verwendung des Rechenstrichs zeigen die Ergebnisse in der Studie von Klein, Beishuizen und Treffers, dass der leere Zahlenstrahl als ein effektives Modell für das Erlernen der Addition und Subtraktion im Hunderterraum darstellt. In dieser Studie wurden zwei experimentelle Programme im Unterricht eingesetzt, um eine größere Flexibilität beim Kopfrechnen mit dem leeren Zahlenstrahls zu erreichen (vgl. KLEIN et al., 1998, S. 443). Die Untersuchung in dieser Arbeit mit der App *Number Line* zeigt, dass beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Hilfe des Rechenstrichs der Aufbau des Zahlverständnisses unterstützt wurde. Die Schülerinnen und Schüler entwickelten ein kognitives Schemata für die Darstellung und Beziehung von Zahlen sowie für die Durchführung der Rechenoperationen. Dies führte zu einem positiven Lerneffekt für die Schülerinnen und Schüler.

5. Fazit und Ausblick

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Auswahl und Häufigkeit von Rechenstrategien zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 zu untersuchen, die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der App *Number Line* am Rechenstrich anwenden. Für diese Arbeit wurde eine Untersuchung für die zweite Klasse entwickelt, welche den Einsatz von Rechenstrategien unter Verwendung der App *Number Line* analysiert.

Um Erkenntnisse aus dieser Untersuchung gewinnen zu können, wurde zunächst der theoretische Hintergrund zu den Rechenstrategien und der App *Number Line* erarbeitet und erläutert. In diesem Teil wurden die Rechenoperationen Addition und Subtraktion fachwissenschaftlich definiert. Anschließend wurde der Begriff *Rechenstrategie* erklärt und die jeweiligen Strategien zur Addition und Subtraktion vorgestellt. Der Einsatz von Rechenstrategien mit Hilfe der App *Number Line* ist im Bildungsplan verankert, der im Anschluss an die Rechenstrategien aufgeführt wurde. Die App *Number Line* bietet einen virtuellen Zahlenstrahl in verschiedenen Varianten, unter anderem einen *leeren Zahlenstrahl*, der auch als Rechenstrich bezeichnet wird. Der Rechenstrich dient als Veranschaulichungsmittel für den Einsatz von Rechenstrategien. Dieser Aspekt wurde nach der Verankerung im Bildungsplan dargestellt und geeignete Rechenstrategien am Rechenstrich für die Addition und Subtraktion ausgewählt und anhand der App *Number Line* veranschaulicht. Um sicherzustellen, dass die App effektiv im Mathematikunterricht eingesetzt werden kann, wurde die Qualität der App mit Hilfe des *Review-Guides* in Anlehnung an das *ACAT-Modell* von Etzold, Kortenkamp und Ladel (2018) überprüft. Nach der Analyse der App *Number Line* wurden nationale und internationale Forschungsergebnisse zum Einsatz von Rechenstrategien aufgearbeitet und vorgestellt. Diese Forschungsergebnisse wurden mit den Ergebnissen in der vorliegenden Studie verglichen und diskutiert.

Der empirische Teil in dieser Arbeit beinhaltet die formulierten Forschungsfragen und Hypothesen, die anhand der gewonnenen Ergebnisse überprüft wurden. Es folgte die Vorstellung des methodischen Vorgehens, in der das

Forschungsdesign, die Konzeption der Aufgaben sowie die Durchführung der Untersuchung aufgezeigt und begründet wurden. Im letzten Abschnitt wurden die Ergebnisse ausgewertet und in einer Diskussion mit anderen Forschungsergebnissen verglichen. Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung weisen zum großen Teil Ähnlichkeiten auf. Wie in anderen Studien zeigen diese Ergebnisse, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vielfalt an Rechenstrategien zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 einsetzen und diese mit Hilfe der App *Number Line* am Rechenstrich veranschaulichen. Zudem konnte eine Häufigkeit der Rechenstrategie des *schrittweisen Rechnens in verschiedenen Formen* sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion festgestellt werden. Auch die seltene Anwendung der Strategien *Hilfsaufgabe*, *Verdopplungsaufgabe* und *Halbierungsaufgabe* ist in dieser Untersuchung sichtbar. Des Weiteren entwickelten die Schülerinnen und Schüler eine Hauptstrategie und wendeten diese bei allen Aufgabentypen der Addition und Subtraktion an. Die Wahl einer Hauptstrategie fiel häufig auf die Strategie des *schrittweisen Rechnens in der Form (Z, E)*. Neben der Entwicklung einer Hauptstrategie konnte auch eine Flexibilität der Rechenstrategien festgestellt werden. Zu den verschiedenen Aufgabentypen wurden geeignete Rechenstrategien eingesetzt und am Rechenstrich dargestellt. Ein Vergleich der beiden Grundschulen zeigt, dass es keine signifikanten Unterschiede in der Auswahl und Häufigkeit der Rechenstrategien gibt. Beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben mit der App *Number Line* griffen die Schülerinnen und Schüler auf ähnliche Rechenstrategien zurück.

In der Mathematikdidaktik stellt sich häufig noch die Frage, ob die Schülerinnen und Schüler im Unterricht eine spezifische Rechenstrategie erlernen und diese für alle Aufgaben einsetzen oder ob die Schülerinnen und Schüler verschiedene Rechenstrategien entdecken und diese aufgabenspezifisch einsetzen. Die Ergebnisse in dieser Arbeit zeigen, dass es eine Flexibilität im Einsatz der Rechenstrategien vorhanden ist. Für die verschiedenen Aufgaben zur Addition und Subtraktion wurden geeignete Rechenstrategien eingesetzt und am Rechenstrich mit den entsprechenden Rechensprüngen dargestellt. Dennoch konnte bei allen Aufgabentypen eine Dominanz der Strategie des *schrittweisen*

Rechnens in der Form (Z, E) festgestellt werden. Es liegt die Annahme nahe, dass in vielen Schulbüchern vorwiegend die Strategie des *schrittweisen Rechnens* thematisiert und diese auch im Mathematikunterricht als bevorzugte Strategie für verschiedene Aufgaben eingesetzt wird.

Die App *Number Line* bietet einen virtuellen Zahlenstrahl als Hilfsmittel für vielfältige mathematische Aufgaben- und Problemstellungen. In der Untersuchung haben die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der App verschiedene Rechenstrategien zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben am Rechenstrich dargestellt. Dazu wurden die Zahlen mit Hilfe der Häkchenauswahl eingetragen und die entsprechenden Rechensprünge zu den Rechenoperationen am Rechenstrich markiert. Diese Darstellung der einzelnen Rechenstrategien am Rechenstrich mit der App *Number Line* repräsentierte die Denk- und Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler. Des Weiteren trägt die App dazu bei, die Externalisierung auf dem mentalen Rechenstrich zu unterstützen, die für das flexible Rechnen erforderlich ist.

Derzeit existieren keine Studien speziell zur Anwendung der App *Number Line.* Daher gibt es noch zahlreiche Möglichkeiten, das Potenzial der App zu untersuchen. Es könnte interessant sein, die App mit anderen virtuellen Arbeitsmaterialien zu vergleichen, insbesondere im Hinblick auf den Einsatz von Rechenstrategien. Ein spannender Ansatz wäre die Analyse der Effektivität der App *Number Line* im Mathematikunterricht über einen Zeitraum von einem Schuljahr. Darüber hinaus könnte die Effektivität der App bei der Einführung des Zahlenstrahls oder von Rechenstrategien untersucht werden.

Die Untersuchung hat gezeigt, dass die App *Number Line* nicht nur ein effektives Hilfsmittel zum Lösen verschiedener Additions- und Subtraktionsaufgaben ist, sondern auch die Arbeit mit Rechenstrategien am Rechenstrich erleichtert. Die Schülerinnen und Schüler lernten schnell den Umgang mit der App, was ihnen viel Spaß und Freude bereitete. Diese positiven Ergebnisse deuten darauf hin, dass die App *Number Line* in Zukunft im Mathematikunterricht eingesetzt werden kann.

6. Literaturverzeichnis

ATHEN, H. & BRUHN, J. (Hrsg.) (1976): *Lexikon der Schulmathematik - und angrenzender Gebiete*. A bis E. Band 1. Köln: Aulis Verlag Deubner & Co KG.

ATHEN, H. & BRUHN, J. (Hrsg.) (1978): *Lexikon der Schulmathematik - und angrenzender Gebiete*. S bis Z. Band 4. Köln: Aulis Verlag Deubner & Co KG.

BEISHUIZEN, M. (1993): *Mental Strategies and Materials or Models for Addition and Subtraction up to 100 in Dutch Second Grades*. In: Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 24. No. 4. S. 294-323.

BEISHUIZEN, M. (1997): *Development of mathematical strategies and procedures up to 100*. In: Beishuizen, M., Gravemeijer, K. & van Lieshout, E. (Hrsg.): *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures*. Utrecht: CD-Beta Press. S. 127-162.

BENZ, C. (2005): *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100*. Hildesheim/ Berlin: Franzbecker Verlag.

BRUNER, J. S. (1974): *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Band 5. Düsseldorf: Berlin Verlag [u. a.].

DEHAENE, S. (1992): *Varieties of numerical abilities*. Cognition. 44. S. 1-42.

DEHAENE, S. & COHEN, L. (1995): *Towards an Anatomical and Functional Model of Number Processing*. Mathematical cognition. Vol. 1. No. 1. S. 83-120.

DÖRING, N. (2022): *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften*. 6. Auflage. Berlin: Springer-Verlag GmbH.

EICHLER, K.-P. (2013): *Strategie ist die Methode. Rechenstrategien für Additions- und Subtraktionsaufgaben entwickeln*. In: Praxis Grundschule. Heft 36. S. 48-49.

ETZOLD, H., KORTENKAMP, U. & LADEL, S. (2018): *ACAT-Review-Guide – Ein tätigkeitstheoretischer Blick auf die Beurteilung von Mathematik-Apps*. In: ETZOLD, H., KORTENKAMP, U, & LADEL, S. (Hrsg.): *Mathematik mit digitalen Medien – konkret. Ein Handbuch für Lehrpersonen der Primarstufe*. Band 4. Münster: WTM. S. 91-98.

FORSTER, O. (2015): *Algorithmische Zahlentheorie*. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum.

FRYKHOLM, J. (2010): *Learning to Think Mathematically with the Number Line - A Ressource for Teacher, A Tool for Young Children*. Oregon: The Match Learning Center.

GELLERT, W., KÜSTNER, H., HELLWICH, M. & KÄSTNER, H. (Hrsg.) (1977): *Kleine Enzyklopädie Mathematik*. 2., völlig überarbeitete Auflage. Thun und Frankfurt/M.: Verlag Harri Deutsch.

GÖTZE, D., SELTER, C. & ZANNETIN, E. (2020): *Das KIRA-Buch: Kinder rechnen anders: Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht.* 2. Auflage. Hannover: Kallmeyer in Verbindung mit Klett Friedrich Verlag GmbH.

GRIESEL, H. (1971): *Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten*. Band 1. Hannover: Hermann Schroedel Verlag KG.

IBM DEUTSCHLAND GMBH (o. D.): *IBM SPSS Statistics*. Version 29.0.1.0 (171). Verfügbar unter:https://www.ibm.com/de-de/products/spss-statistics, konsultiert am 20.06.2023. o. S.

KÄPNICK, F. & BENÖLKEN, R. (2020): *Mathematik lernen in der Grundschule*. 2. Auflage. Berlin: Springer-Verlag GmbH.

KLEIN, A. S. (1998): *Flexibilization of Mental Arithmetic Strategies on a Different Knowledge Base*: *The Empty Number Line in a Realistic Versus Gradual Program Design*. (Doctoral dissertation, Leiden University). Utrecht: CD-Beta Press.

KLEIN, A. S., BEISHUIZEN, M., TREFFERS, A. (1998): *The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic Versus Gradual Program Design*. In: Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 29. No. 4. S. 443-464.

KRAUTHAUSEN, G. & SCHERER, P. (2008): *Einführung in die Mathematikdidaktik*. 3. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

STÄNDIGE KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND (KMK) (2004): *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich.* Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. Verfügbar unter: https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf, konsultiert am 20.06.2023.

LADEL, S. & KORTENKAMP, U. (2015): *Tätigkeitsorientiert zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten – Ein Ansatz aus Sicht der Artefact-Centric Activity Theory*. In: LADEL, S. & SCHREIBER, C. (Hrsg.): *Von Audiopodcast bis Zahlensinn*. Band 2. Münster: WTM. S. 151-176.

LADEL, S. & KORTENKAMP, U. (2016): *Artifact-Centric Activity Theory – A Framework for the Analysis of the Design and Use of Virtual Manipulatives*. In: MOYER-PACKENHAM, P. S. (Hrsg.): *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives*. Schwitzerland: Springer International Publishing. S. 25-40.

LORENZ, J. H. (2004): *Kinder entdecken die Mathematik*. 1. Auflage. Braunschweig Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH.

LORENZ, J. H. (1998): *Das arithmetische Denken von Grundschulkindern*. In: PETER-KOOP, A.: *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grund schule*. Offenburg: Mildenberger Verlag GmbH. S. 59-82.

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG (2016): *Bildungsplan der Grundschule*. Mathematik. Verfügbar unter: https://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GS_M.pdf, konsultiert am 20.06.2023.

PADBERG, F. & BENZ, C. (2021): *Didaktik der Arithmetik: fundiert, vielseitig, praxisnah*. 5., überarbeitete Auflage. Berlin: Springer Verlag GmbH.

RADATZ, H., SCHIPPER, W., DRÖGE, R. & EBELING, A. (1998): *Handbuch für den Mathematikunterricht 2. Schuljahr*. Hannover: Schroedel Verlag im Bildungshaus Schroedel Diesterweg Bildungsmedien GmbH & Co. KG.

RESNICK, L. B. (1983): *A Developmental Theory of Number Understanding*. In: GINSBURG, H. P. (Hrsg.): *The Development of Mathematical Thinking.* Orlando. FL.: Academic Press. S. 4-46.

SELTER, C. & SPIEGEL, H. (1997): *Wie Kinder rechnen*. 1. Auflage. Leipzig/ Stuttgart/ Düsseldorf: Ernst Klett Grundschulverlag GmbH.

SCHERER, P. & MOSER OPITZ, E. (2010): *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

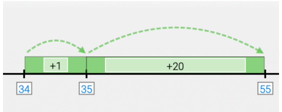
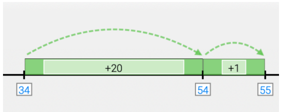
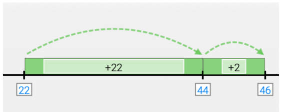
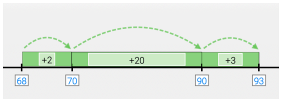
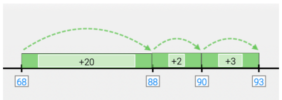
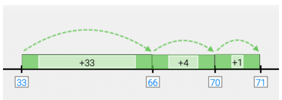
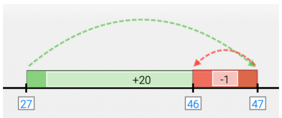
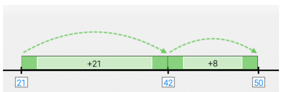
SCHIPPER, W. (2009): *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH.

THE MATH LEARNING CENTER (2022): *Number Line, by MCL - A Math Learning Center tool*. Version 4.1.0. [Mobile App]. Verfügbar unter: https://apps.apple.com/de/app/number-line-by-mlc/id751816884. konsultiert am 12.07.2023. o. S.

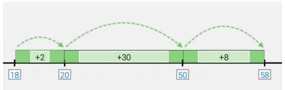
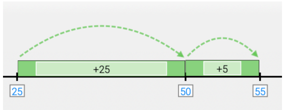
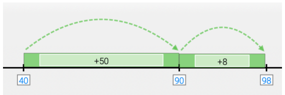
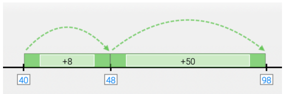
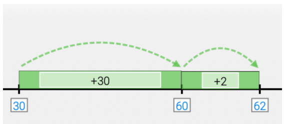
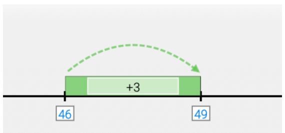
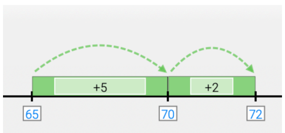
WITTMANN, E. CH. & MÜLLER, G. N. (2019): *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band I: Vom Einspluseins zum Einmaleins.* 2. Auflage. Hannover/ Stuttgart: Kallmeyer in Verbindung mit Ernst Klett Verlag GmbH.

7. Anhang

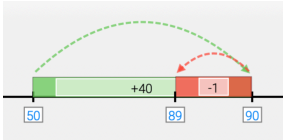
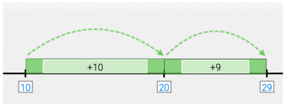
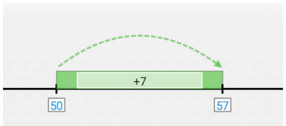
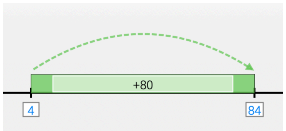
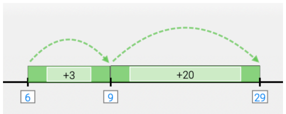
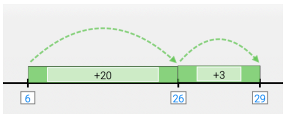
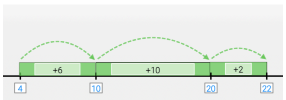
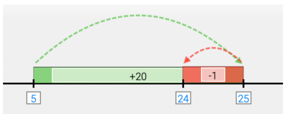
Addition im Hunderterraum:

Aufgabentypen	Geeignete Rechenstrategien:	Visualisierungen am Rechenstrich:
ZE + ZE (ohne Zehnerübergang) Beispiele: 34 + 21 22 + 24	Schrittweise ZE + Z, dann +E: 34 + 21 34 + 20 + 1	Schrittweise ZE + Z, dann +E: 34 + 21 
	Schrittweise ZE + E, dann +Z: 34 + 21 34 + 1 + 20	Schrittweise ZE + E, dann +Z: 34 + 21 
	Verdopplungsaufgaben: 22 + 24 22 + 22 + 2	Verdopplungsaufgaben: 22 + 24 
ZE + ZE (mit Zehnerübergang) Beispiele: 68 + 25 33 + 36	Schrittweise, erst +E, dann +Z, dann die restlichen +E (Zehnerergänzung): 68 + 25 68 + 2 + 20 + 3	Schrittweise, erst +E, dann +Z, dann die restlichen +E (Zehnerergänzung): 68+25 
	Schrittweise, erst +Z, dann +E bis zum Zehner, dann die restlichen +E (Zehnerergänzung): 68 + 25 68 + 20 + 2 + 3	Schrittweise, erst +Z, dann +E bis zum Zehner, dann die restlichen +E (Zehnerergänzung): 68+25 
	Verdopplungsaufgaben: 33 + 36 33 + 33 + 3	Verdopplungsaufgaben: 33 + 36 
ZE + Z9 (Nähe zu Z) Beispiele: 27 + 19 21 + 29	Hilfsaufgaben (Vor-Zurück): 27 + 19 27 + 20 - 1	Hilfsaufgaben (Vor-Zurück): 27 + 19 
	Verdopplungsaufgaben: 21 + 29 21 + 21 + 8	Verdopplungsaufgaben: 21 + 29 

Die Abbildungen in dieser Tabelle sind Screenshots der App *Number Line* (vgl. The Math Learning Center, 2022, o. S.)

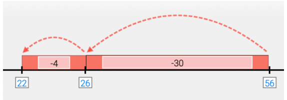
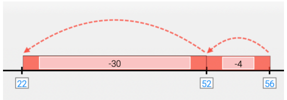
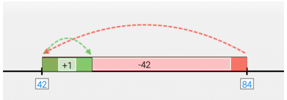
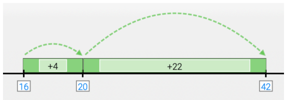
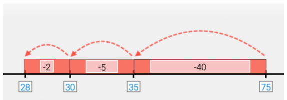
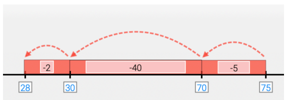
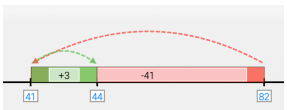
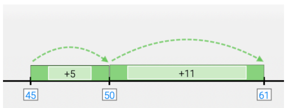
ZE + Z Beispiele: 18 + 40 25 + 30	Schrittweise, erst +E bis zum Zehner, dann +Z , dann die restlichen +E (Zehnerergänzung): 18 + 40 18 + 2 + 30 + 8 Verdopplungsaufgaben: 25 + 30 25 + 25 + 5	Schrittweise, erst +E bis zum Zehner, dann +Z , dann die restlichen +E (Zehnerergänzung): 18 + 40  Verdopplungsaufgaben: 25 + 30 
Z + ZE Beispiele: 40 + 58 30 + 32	Schrittweise Z + Z, dann +E: 40 + 58 40 + 50 + 8 Schrittweise Z + E, dann +Z: 40 + 58 40 + 8 + 50 Verdopplungsaufgaben: 30 + 32 30 + 30 + 2	Schrittweise Z + Z, dann +E: 40 + 58  Schrittweise Z + E, dann +Z: 40 + 58  Verdopplungsaufgaben: 30 + 32 
ZE + E (ohne Zehnerübergang) Beispiel: 46 + 3		46 + 3 
ZE + E (mit Zehnerübergang) Beispiel: 65 + 7	Schrittweise ZE +E, dann die restlichen +E (Zehnerergänzung): 65 + 7 65 + 5 + 2	Schrittweise ZE +E, dann die restlichen +E (Zehnerergänzung): 65 + 7 

Die Abbildungen in dieser Tabelle sind Screenshots der App *Number Line* (vgl. The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Z + Z9 (Nähe zu Z) Beispiele: 50 + 39 10 + 19	Hilfsaufgaben (Vor-Zurück): 50 + 39 50 + 40 - 1 Verdopplungsaufgaben: 10 + 19 10 + 10 + 9	Hilfsaufgaben (Vor-Zurück): 50 + 39  Verdopplungsaufgaben: 10 + 19 
Z + E Beispiel: 50 + 7		50 + 7 
E + Z Beispiel: 4 + 80		4 + 80 
E + ZE (ohne Zehnerübergang) Beispiel: 6 + 23	Schrittweise E + E, dann +Z: 6 + 23 6 + 3 + 20 Schrittweise E + Z, dann +E: 6 + 23 6 + 20 + 3	Schrittweise E + E, dann +Z: 6 + 23  Schrittweise E + Z, dann +E: 6 + 23 
E + ZE (mit Zehnerübergang) Beispiel: 4 + 18	Schrittweise, erst +E bis zum Zehner, dann +Z , dann die restlichen +E (Zehnerergänzung): 4 + 18 4 + 6 + 10 + 2	Schrittweise, erst +E bis zum Zehner, dann +Z , dann die restlichen +E (Zehnerergänzung): 4 + 18 
E + Z9 Beispiel: 5 + 19	Hilfsaufgaben (Vor-Zurück): 5 + 19 5 + 20 -1	Hilfsaufgaben (Vor-Zurück): 5 + 19 

Die Abbildungen in dieser Tabelle sind Screenshots der App *Number Line* (vgl. The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Subtraktion im Hunderterraum:

Aufgabentypen	Geeignete Rechenstrategien:	Visualisierungen am Rechenstrich:
ZE - ZE (ohne Zehnerübergang) Beispiele: 56 - 34 84 - 41 42 - 16	Schrittweise ZE - Z, dann -E: 56 - 34 56 - 30 - 4	Schrittweise ZE - Z, dann -E: 56 + 34 
	Schrittweise ZE - E, dann -Z: 56 - 34 56 - 4 - 30	Schrittweise ZE - E, dann -Z: 56 - 34 
	Halbierungsaufgaben: 84 - 41 84 - 42 + 1	Halbierungsaufgaben: 84 - 41 
	Ergänzungsaufgaben: 42 - 16 16 + — = 42	Ergänzungsaufgaben: 42 - 16 
ZE - ZE (mit Zehnerübergang) Beispiele: 75 - 47 82 - 38 61 - 45	Schrittweise, ZE -Z, dann -E bis zum Zehner und dann die restlichen -E (Zehnerergänzung): 75 - 47 75 - 40 - 5 - 2	Schrittweise, erst -Z, dann -E bis zum Zehner und dann die restlichen -E (Zehnerergänzung): 75 - 47 
	Schrittweise, ZE -E bis zum Zehner, dann -Z und dann die restlichen -E (Zehnerergänzung): 75 - 47 75 - 5 - 40 - 2	Schrittweise, ZE -E bis zum Zehner, dann -Z und dann die restlichen -E (Zehnerergänzung): 75 + 47 
	Halbierungsaufgaben 82 - 38 82 - 41 + 3	Halbierungsaufgaben 82 - 38 
	Ergänzungsaufgaben: 61 - 45 45 + __ = 61	Ergänzungsaufgaben: 61 - 45 

Die Abbildungen in dieser Tabelle sind Screenshots der App *Number Line* (vgl. The Math Learning Center, 2022, o. S.)

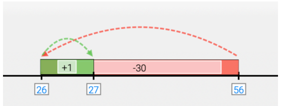
<table>
<tr>
<td>ZE -Z9 (Nähe zu Z)

Beispiele:
56 - 29
44 - 19
65 - 49</td>
<td>Hilfsaufgaben (Zurück-Vor):
56 - 29
56 - 30 + 1

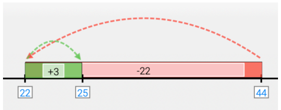
Halbierungsaufgaben:
44 - 19
44 - 22 + 3

Ergänzungsaufgaben:
65 - 49
49 + __ = 65</td>
<td>

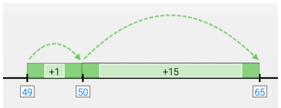
Hilfsaufgaben (Zurück-Vor):
56 - 29



Halbierungsaufgaben:
44 - 19



Ergänzungsaufgaben:
65 - 49



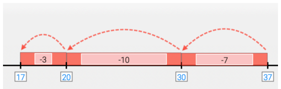
</td>
</tr>
<tr>
<td>ZE - Z

Beispiele:
37 - 20
62 - 30
97 - 60</td>
<td>Schrittweise, ZE -E bis zum Zehner, dann -Z und dann die restlichen -E (Zehnerergänzung):
37 - 20
37 - 7 - 10 - 3

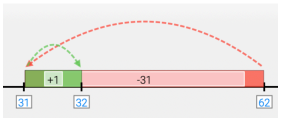
Halbierungsaufgaben:
62 - 30
62 - 31 + 1

Ergänzungsaufgaben:
97 - 60
60 + __ = 97</td>
<td>

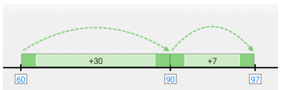
Schrittweise, ZE -E bis zum Zehner, dann -Z und dann die restlichen -E (Zehnerergänzung):
37 - 20



Halbierungsaufgaben:
62 - 30



Ergänzungsaufgaben:
97 - 60



</td>
</tr>
</table>

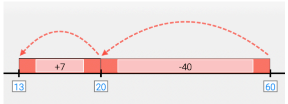
Die Abbildungen in dieser Tabelle sind Screenshots der App *Number Line* (vgl. The Math Learning Center, 2022, o. S.)

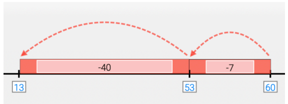
<table>
<tr>
<td>Z - ZE

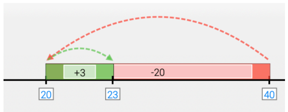
Beispiele:
60 - 47
40 - 17
50 - 16</td>
<td>Schrittweise Z - Z, dann -E:
60 - 47
60 - 40 - 7

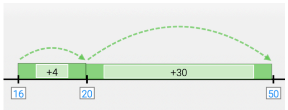
Schrittweise Z -E, dann -Z:
60 - 47
60 - 7 - 40

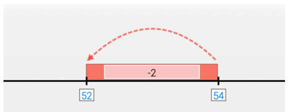
Halbierungsaufgaben:
40 - 17
40 - 20 + 3

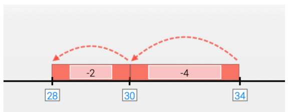
Ergänzungsaufgaben:
50 - 16
16 + — = 50</td>
<td>Schrittweise Z - Z, dann -E:
60 - 47


Schrittweise Z -E, dann -Z:
60 - 47


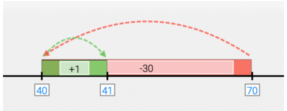
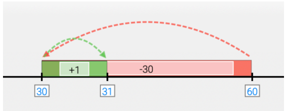
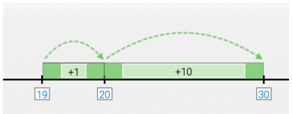
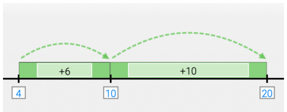
Halbierungsaufgaben:
40 - 17


Ergänzungsaufgaben:
50 - 16

</td>
</tr>
<tr>
<td>ZE - E (ohne Zehnerübergang)

Beispiel:
54 - 2</td>
<td></td>
<td>54 - 2

</td>
</tr>
<tr>
<td>ZE - E (mit Zehnerübergang)

Beispiel:
34 - 6</td>
<td>Schrittweise, ZE -E bis zum Zehner, dann die restlichen -E (Zehnerergänzung):
34 - 6
34 - 4 - 2</td>
<td>Schrittweise, ZE -E bis zum Zehner, dann die restlichen -E (Zehnerergänzung):
34 - 6

</td>
</tr>
</table>

Die Abbildungen in dieser Tabelle sind Screenshots der App *Number Line* (vgl. The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Z - Z9 (Nähe zu Z) Beispiele: 70 - 29 60 - 29 30 - 19	Hilfsaufgaben (Zurück-Vor): 70 - 29 70 - 30 + 1 Halbierungsaufgaben: 60 - 29 60 - 30 + 1 Ergänzungsaufgaben: 30 - 19 19 + __ = 30	Hilfsaufgaben (Zurück-Vor): 70 - 29  Halbierungsaufgaben: 60 - 29  Ergänzungsaufgaben: 30 -19 
Z - E Beispiel: 20 - 4	Ergänzungsaufgaben: 4 + __ = 20	Ergänzungsaufgaben: 4 + __ = 20 

Die Abbildungen in dieser Tabelle sind Screenshots der App *Number Line* (vgl. The Math Learning Center, 2022, o. S.)

Informationsbrief zur Befragung über die Rechenstrategien von Zweitklässlern

Liebe Eltern der Schülerinnen und Schüler der Klasse 2,

mein Name ist Sarah Niederberger und ich studiere derzeit im Studiengang Lehramt Grundschule an der Pädagogischen Hochschule in Schwäbisch Gmünd.

Im Rahmen meiner Bachelorarbeit möchte ich gerne eine Befragung über die Rechenstrategien von Schülerinnen und Schülern aus der zweiten Klasse durchführen.

Während der Befragung erhalten die Schülerinnen und Schüler ein Tablet. Mit diesem Tablet bearbeiten die Schülerinnen und Schüler verschiedene Aufgaben zur Addition und Subtraktion am Rechenstrich mithilfe der App „Number Line". Die App „Number Line" ist dafür geeignet, um Rechenstrategien am Rechenstrich darzustellen. Bevor die Schülerinnen und Schüler mit dieser App arbeiten, bekommen sie eine kleine Einführung und genügend Zeit zum Ausprobieren. Die Ergebnisse werden anschließend per Screenshot festgehalten. Die Befragung erfolgt anonym, das bedeutet, es werden weder Aufnahmen noch Daten von den Schülerinnen und Schülern erfasst.

Die Befragung mit den Schülerinnen und Schülern findet nach Absprache mit Frau Schuller am Montag, den 22.05.2023 statt.

Ich bedanke mich schon mal im Voraus und freue mich auf eine gute Zusammenarbeit mit den Schülerinnen und Schülern.

Mit freundlichen Grüßen

Sarah Niederberger

Plus- und Minusaufgaben mit dem Rechenstrich

Zeige deinen Rechenweg am Rechenstrich auf dem Tablet und rechne aus.

Mache einen Screenshot von deinem Rechenweg.

Trage dann das Ergebnis hier ein.

1.

a) **34 + 35 = ____**

b) **54 + 28 = ____**

c) **27 + 19 = ____**

2.

a) **62 - 37 = ____**

b) **56 - 29 = ____**

c) **88 - 43 = ____**